● 物理專文 ●

超弦導論

余海禮

(I) 引 言：

超弦（Super string）夾著其驚人的成長與魅力，在過去兩、三年中深深吸引著物理學家的注意，成為當今最熱門的統一場論：這個被戲稱為全能理論（Theory of Everything，TOE）的理論不單只克服了標準模型（standard model）的諸多困難，為統一宇宙中包括重力在內的基本作用力及粒子提供了一可行的方案，同時也免除了點粒子論中無可避免的任意性（arbitrariness）。

標準模型對描述電磁、弱及強作用方面的成就是無與倫比的！其實到目前為止，所有實驗數據所指都顯示與標準模型一致。那麼，一個即刻出現的問題便是，我們還憑什麼要求更好的理論呢？對大部份標準模型的批評者來說，標準模型充斥著太多任意、刻意、微調及無法解釋的參數，此乃最為人詬病的地方。當然，所有這些美學經驗的不快並不能證明它的謬誤，甚至不完整。但回顧粒子事件的成功歷史，企圖為那些任意出現的參數尋找一更深層次的理解乃是再自然不過的事。這份名單中包括了：規範群及表像的選擇，克夸及輕子的家族數，Higgs 對稱破壞的來源及各參數所有值等。

大統一場論（Grand Unification Theories）在這方面提供了部份答案，然而代價却是把能量推至 $10^{14} \sim 10^{16}$ Gev 遙不可及的領域中去。無論標準模型也好，大統一場論也好，其所謂缺憾都是美學上主觀的批評，並不能證明什麼！其最嚴重的缺失莫過於無法把重力囊括其中：透過普遍座標變換守恆（General Coordinate Invariance）法則，我們可以簡易地把愛因斯坦重力（Einsteinian Gravity）偶合到任一相對性場論中。在古典的範疇中，這並不構成任何問題，但任何量子化的努力都無法克服原本就具有重化性（renomalizable）的量子場論在偶合到重力後產生紫外發散（Ultra Violet Divergence）的問題。經過多年來的努力顯示，這是任何點粒子理論的普遍問題；縱使是純愛因斯坦重力亦在不久前被證明兩環發散。純超重力（Supergravity）於四度時空雖是兩環有限，但亦被認為三環發散，引入更多的空間維數，非但無助於問題的解決，反而使問題更為糟糕。（例如：11-維中的超重力）。但令人驚異的是這時刻亦正是超弦過來挽救所有問題的時刻。

在七十年代末、八十年代初，弦論剛開始時是嚐試用來描述强核子力的！那時的第一個弦論充滿了困難：能譜中缺乏費米子，超子（Tachyon）以及自旋為 2 的零質量態的出現，及需要26 維時空以滿足其一致性等！到了 1971 年，第二個嚐試克服上述困難的弦論成功地利用Pierre Ramond 所提供之法則引入

費米子。雖然在此理論最初提出的形式中，仍然無法避免超子的出現，但却已具有二維弦世面（String World Sheet）超保角（Superconformal）對稱；可惜其時空超對稱（Supersymmetry）仍並不明顯。同時這種超弦于1972年被證明只能存在於十維時空中。五年後，Gliozzis Scherk 及 Olive 利用能譜切截（Spectrum Truncation）方法把超子趕走。他們同時觀察到在同一質層（mass level）中，費子與波子數都相等，因此猜測該弦論可能具有時空超對稱性。但這點一直到1980年才被Michael Green與John Schwarz所證實。

(Ⅰ) 弦統一論：

無論早期的玻弦也好，後來的超弦也罷，都無法描述强子物理。除了多出來的22或6維空間令人尷尬外，在强子物理中並無相對應自旋為2之零質量態也叫弦信服者頭痛不已。直到1974年，Joel Scherk 和 John Schwarz發現這同時出現在玻弦及超弦的零質量態之作用方式竟與低能量時的標準愛因斯坦重力一樣。因此，他們大膽的把這粒子看作一重力子（Graviton）而非普通的强子，這意味著弦論應該是統一重力與其他作用力的一個基本理論，而非强子作用理論，亦即我們觀察到的所謂基本粒子應是一維的弦而非平常所謂的點粒子。

以弦統攝萬象，並不是一厢情願的浪漫想法，而是建立在諸多非常有利的特質上的！首先，弦論的一特質乃在於其自自然然地把重力統攝其中，且因弦論並無平常所謂紫外發散的困擾，所以來自弦論的重力也就應該不具發散問題了！弦論需要重力的存在而點粒子論則恰恰相反。也就是基於這一特質，使弦論的工作者能忍受十多年漫長、孤寂的奮鬥，終於使之成為一被廣泛接受的理論。

將弦論視為一統一理論而非强子作用論也有其他諸多好處：例如，令人尷尬的多餘空間在這裡也可獲得一個合理的詮釋，因為時空的幾何性質在重力理論中是決定於理論的動力，所以很可能這些觀察不到的空間只是自發封閉（Spontaneous Compactification）的結果。另外，弦理論也沒有可供任意調節的零綱量（dimensionless）參數，同時，可供自由選擇的對稱群及表象（representation）亦受到嚴格機制。當然，這將比標準模型更具預測性了。從另一方面來說，把重力引進統一理論中已足以嚴格地限制其自由度到一有效低能物理的程度。

一個明顯的問題是：為什麼我們考慮的是一維的弦論，而不是把點粒子論做兩維及多維推廣。雖然，目前吾人尚不能確證多維推廣的不可行性，但弦論中的諸般奇蹟的確不是其他更高維次理論所能取代的。單以2維弦世面作用

$$S \sim \int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha X^{\mu}\, \partial_\beta X_{\mu} \qquad (1)$$

的可重化性（renormalizable）而言，就非其他更高維次理論所能擁有的了！此外，2維弦作用特有的無窮維次保角對稱（infinite dimensional conformal symmetry）也大大的簡化了數學上的繁複性。這些特質都是不能推廣到高維次理論上的。總括來說，建造非粒點性物體的相對性量子論是非常艱難的，這也可解釋為何我們只有有限的幾個弦論及其極強的預測能力。

弦論中含有一個基本長度參數，亦即弦的長度，若要把弦論中重力的大小和觀察到的牛頓重力自然地連結在一起的話，則這基本長度只能大約是蒲郎克（Plank）長度（$\cong 10^{-33}$ cm）了。如此，弦統一論中的基本長度就比强子弦論中的長度小了20個階次。

(Ⅱ) 弦 論：

目前，弦論有其各種不同的詮釋及處理方法。雖

然每種方法的結果都將完全一樣。現在讓我們討論一下個人比較喜歡的所謂Polyakov 弦的方法，過去數年中，物理學家曾討論過各種不同的量子場論，有眞實的，也有玩具式的；其中有一系列看來不具任何眞實性的玩具模型，却有意想不到的數學性質。2 維的保角場論便是其中之一（當這些模型被應用於固體表面的相變時，的確具有眞實性的一面），2 維意味著我們需要兩個坐標軸 σ^0 及 σ^1 及一個 2× 2 的規度張量，$g_{\alpha\beta}(\sigma)$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ 其功能就好像在廣義相對論中，使我們能把每件事都寫成協變型式一樣；我們也可以在這 2 維空間中加入物質場，最簡單的當然是純量場 $X(\sigma)$ 了，如果我們同時有好幾個純量場 $X(\sigma)$ 的話，我們也要引進一個指標 μ 來分辨，我們稱每個場爲 $X^{\mu}(\sigma)$，到目前爲止，我們可以想像到的是：我們可以構造無窮多個理論。現在，讓我們看看，一旦引入兩個重要對稱的戲劇性效果：

第一個是位移不變性：

$$X^{\mu}(\sigma) \to X^{\mu}(\sigma) + a^{\mu};$$
$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \to g_{\alpha\beta}(\sigma) \tag{2}$$

第二個是Weyl 不變性，亦即是局部再刻度（rescaling of length）不變：

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \to f(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma);$$
$$X^{\mu}(\sigma) \to X^{\mu}(\sigma) \tag{3}$$

其中 $f(\sigma)$ 爲一任意函數，現在，我們馬上發現基本上我們只剩下一個如式(1)的理論了！

$$S[g . X] = -\tfrac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{\operatorname{Det} g(\sigma)}\; g^{\alpha\beta}(\sigma) \frac{\partial X^{\mu}(\sigma)}{\partial \sigma^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}(\beta)}{\partial \sigma^{\beta}} \eta_{\mu\nu}$$

這作用是Weyl 不變的，因爲在Weyl 變換下，$g^{\alpha\beta}$（$g_{\alpha\beta}$ 的倒數）得到一個 f^{-1} 因子，而 2 維 $\operatorname{Det} g$ 得到 f^2；重要的是，任何其他導數及高次導數的引入都必定引進 $g^{\alpha\beta}(\sigma)$，也因此破壞 $f(\alpha)$ 的消除。這是個非常奇怪而且幾乎是唯一的特質：理論中的動力居然完全由對稱性所決定！

直到目前爲止，$\eta_{\mu\nu}$ 只是一個任意的對稱常數矩陣而已，其實只要弄掉作用中 $X^{\mu}(\sigma)$ 的線性組合，我們便可把 $\eta_{\mu\nu}$ 簡化成非奇異矩陣（non- singular matrix），再適當地把剩下的 $X^{\mu}(\sigma)$ 作線性組合當做我們要討論的場 $X^{\mu}(\sigma)$，$\eta_{\mu\nu}$ 可以進一步簡化成一對角值只有 ± 1 的對角形式。同時從一致性的結果中，$\eta_{\mu\nu}$ 最多只能有一個 −1 值（基於除鬼（ghost）的需要）。到這裡，我們就可以隨意訴諸於因果律（Causality）或甚至用骰子來得到一個閔可斯基（Minkowski）形式：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

因此，至少在這純玻子模型中，連羅倫茲（Lorentz）不變性也只是其他對稱的結果！

或者，在這裡我應該指出一點：在得到上述 $\eta_{\mu\nu}$ 的形式時，我們是要賦予 $X^{\mu}(\sigma)$ 一個適當單位的，如果我們要用公分而不是弦單位來度量 $X^{\mu}(\sigma)$ 的話，那麼，在式(3)的作用中我們是要加入一個具綱量的常數 T，弦張力（String tension），這就是整個理論中唯一的自由參數了。

這是個量子場論，因此我們自然要做些量子平均了。一個算子 $F[X, g]$ 的期望值可以用對所有可能的 $X^{\mu}(\sigma)$ 及 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 做路線積分求得：

$$\langle F \rangle = \int [dX]\,[dg]\, F(X, g)\, e^{-S[x,g]} \tag{5}$$

$X^{\mu}(\sigma)$ 在作用 $S[X, g]$ 中永遠以二元次出現，式(5)中對 $X^{\mu}(\sigma)$ 部份的泛函積分的處理是很容易的。因此對 $X^{\mu}(\sigma)$ 來說，這只是個自由場論而已，但對 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 的泛函積分則困難得多了。表面看來，這幾

乎是個無法克服的困難。幸好在 2 維面上，數學家已為我們寫下一些非常有用的定理（也只限於 2 維面而已！），2 維面的拓撲（Topology）性質只是球面加上 r 個手把（genus），該性質也完全由這 r 個手把來決定。而且，面的幾何性質也完全由幾個有限的 Teichmuller 複數參數所決定；$r = 0$ 時是零，$r = 1$ 只有一個，當 $r \geq 2$ 時，有 $3r - 3$ 個，在這些數學定理的幫助下，對規度 $g_{\alpha\beta}$ 的泛函積分就變成只需把所有不同 r 的貢獻加起來，再對每個 r 所對應的 Teichmuller 參數做普通的積分而已！這仍然是非常困難的，但至少比 4 維廣義相對論中的泛函積分容易無窮多倍！

這跟現實世界又有什麼關係呢？狹義地說，就是我們應該用什麼算子 F 來求平均呢？對這些結果又該如何加以物理詮釋呢？

我曾提及作用 $S[g, X]$ 為 $X^\mu(\sigma) \to X^\mu(\sigma) + a^\mu$ 變換守恆，而且自然地得到羅倫茲守恆：$X^\mu \to \Lambda^\mu_\nu X^\nu$，因此我們可建立在非均勻羅倫茲群（inhomogenous Lorentz group）變換下類似粒子動量 P 及自於 j 的頂點算子（Vertex operators）$[X, g; P, j]$；例如，以 $j = 0$ 來說，其頂點算子為：

$$V[X, g; P, O] = \int d^2\sigma \sqrt{\operatorname{Det} g(a)}\, e^{iP\cdot X(\sigma)} \tag{6}$$

這些算子的量子平均剛好具有正確的羅倫茲變換，可以作為一個以 X^μ 為坐標軸的空間的 S —矩陣元素

$$S_{12 \cdots\cdots \to 34 \cdots\cdots} = \langle V_1 V_2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot V_3 V_4 \cdot\cdots\cdots \rangle \tag{7}$$

要使上述平均具備意義，我們還得遵守 Weyl 及規度 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 坐標變換守恆，這時奇蹟出現了，這樣的一個平均值不單只在 $X(\sigma)$ 空間中具有正確的羅倫茲性質，還同時具有正確的么一性（unitary）。嚴格來說，么一性只在頂點算子及量子平均時適當地歸一的情形下才能成立，這使我們可以把歸一因子在只有一個自由參數的情形下固定下來，這參數就是偶合常數（Coupling Constant）了；而把手 r 對 n —粒子 S —矩陣的貢獻則會提供一個 g^{2r+n-2} 的因子。這奇蹟使得高維次空間的物理與背後的 2 —維量子場論結合一起：高維次空間的 S —矩陣就是 2 維場論的量子平均。

較早時代亦已指出所有這些結果都決定性地依賴 Weyl 守恆的保持，否則在進行對 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 做路線積分的時候，我們將要面對的就不是有限個 Teichmuller 參數，而是無窮個無法處理的參數了。但我們亦不要忘掉一個從 Adler — Bell — Jackiw 異變（Anomaly）中學到的教訓：作用中的對稱是會被量子修正（quantum corrections）亦即所謂異變（Anomalies）所破壞的！在這裡也有著類似 Adler — Bell — Jackiw Anomaly 的出現把 Weyl 守恆破壞，這些異變決定於各種不同的場的個數，每種場 $X^\mu(\sigma)$ 都會貢獻一個異變，同時規度也對異變對應地作出 −26 倍的貢獻。把它們加起來，要求異變相消則只有要求理論中有 26 個 $X^\mu(\sigma)$ 場了，因此我們如要把這 2 維理論看作一 S —矩陣理論，則那便是一個 26 維空間的理論了。

頂點算子 $V[X, g; P, j]$ 也會引起異變的。在建造 V 時需要一個 $e^{iP\cdot X}$ 因子來給出正確的位移守恆性質。這因子卻是發散的。因此要使這發散的因子具備意義，我們也得引進一個坐標變換守恆的調整器（regulator），這樣，我們便必得起用規度 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 了。那使 $e^{iP\cdot X}$ 基本上正比於 $[\operatorname{Det} g]^{P^2/16\pi T}$。同時弦世面積分也會貢獻一個 $(\operatorname{Det} g)^{1/2}$ 外，頂點函數中 $2N$ 個對 X 的導數也會給出 N 個 $g^{\alpha\beta}$ 因子，因此 Weyl 守恆要求（在 $r = 0$ 的情形下，亦即 tree 近似）：

$$\frac{P^2}{8\pi T} = 1 - N \tag{8}$$

當$N=0$時，對應的粒子的質量的平方等於$-8\pi T$，我們得到了超光子（Tachyon），那當然是這種純玻子理論中嚴重的問題了！$N=1$時，對應粒子的質量爲零，同時頂點算子中有兩個$\frac{\partial X}{\partial \sigma}$導數，因此這粒子就具有張量變換性；那是個重力子（graviton），零質量標粒子及一個反對稱張量規範粒子的組合。這時如果我們要把那自旋爲2的零質量粒子看作重力子的話則弦張力就非得差不多等於蒲郎克長度（10^{-33} cm）不可，這使$N\geq 2$的高次態變得奇重無比。到目前爲止，我們只遇到兩個自由參數而已矣！一個是用來連繫c·g·s單位及弦單位長度（或質量）的弦張力T。另一個便是較早前提及以g^{n+2r-2}形式出現在n—粒子S—矩陣元素中的偶合常數g，其實，這偶合常數g很可能不是一個眞正的自由參數；他總是與一個標量場的期望值的乘積一起出現（閉弦的其中一個零質量態），而這乘積卻是由動力所決定。這可能使我們在微擾計算中略感失望，因爲我們失去了一個可供微擾展開（perturbative expansions）的細小自由參數，但在量子色子力學（quantum chromodynamics）及流體力學（hydrodynamus）中我們不正是有著同樣困惑，卻仍擁有大量預測能力的情形嗎？況且如果我們的目標是個眞正的基本理論的話，當然也不希望其中有任何可任意調整的自由參數。

(IV) 弦論的分類：

以上我描述了如何將一個2維量子場論詮釋爲一個在26維時空中運動的閉弦（closed string）論，當然，我們有各種不同的2維量子場論分別對應於各種不同的弦論，有同樣生活在26維時空，及超光子缺憾，但零質量態屬於規範群U（n），O（n）或Sp(n)的矢量玻子（vector boson）的開弦（open string）。也有左，右手的2維費米場；爲了避免鬼（ghost）態，的出現，我們得對每個擁有時間指標（time index）的費米場引入2維超對稱（Supersymmetry），這樣使時空維數得以與費米場數連結起來，每個費米場都貢獻一個異變，導致Weyl 異變相消的時空維數條件從26遞減至10。同樣，我們可以選擇開或閉弦。

那我們到底有多少種弦論呢？答案到目前爲止還是個未知數，當然最理想則莫過於只能有一個弦論了。雖然今日我們有好幾種弦論，但最後可能是一致性的否定又或等價性使得我們最後只有一個弦論，一致性（Consistency）使弦論必需致少具備以下兩個條件：①沒有超光子（Tachyon）及鬼（ghost）態（態的長度爲負）的出現②在環幅（loop amplitude）中沒有異變（anomalies）及具備modular 守恆性。

到目前爲止我們一共找到了6種如表一所示具備上述一致性的弦論，每種弦都要求10維時空及具有2維弦世面超保角對稱（Super-conformal symmetry）性。超弦不單只具有2維超保角對稱，而且也

名　稱	D=10 Super Symmetry	Yang-Mill Symmetry
Type Ⅰ	N = 1	SO（32）
Type ⅡA	N = 2	—
Type ⅡB	N = 2	—
Heterotic	N = 1	SO(32)
Heterotic	N = 1	E8×E8
Heterotic	N = 0	SO（16）×SO（16）

表一

具有10維Super-Poincare對稱。D=10 超對稱總共有3種可能，而且每種都可以在超弦中得以實現。D=10的minimal irreducible 旋子（Spinor）的特性之一便是可以同時滿足Majorana 及 Weyl條件而只有16個獨立實數分量。只有一個守恆的Weyl-Majorana 超荷（Supercharge）的理論具有$N=1$超對稱，表一中有三種超弦都可以實現這條件，對具

有兩個守恆超荷的理論來說卻有2種不同的可能。他們分別是具有相反手徵(chirality)的type ⅡA及相同手徵的type ⅡB，那是在作用(interacting)理論中所能具有的最大(maximum)超對性了(相等於D=4的N=8超對稱)。

標準型的一個事實乃是夸克及輕子的左右非對稱(left-right asymmetry)要在一個高於4維的理論中取得這種chiral asymmetry則莫過於一開始時便把這種性質引入其中，在表一中，除了Type ⅡA外，每種弦都有這種特性。而$E_8 \times E_8$ Heterotic弦則最具給出現實物理世界中低能現象的潛力。

(Ⅴ) 弦緊閉(String Compactification)

上面我一再提及無論玻弦也好，超弦也好，他們最大的特徵之一乃是都得生活在大於4維的時空中，如何緊閉那些多餘的空間，使之能與現實物理世界結合乃今日弦論工作者最重要的課題之一，這是個日新月異發展迅速無比的課題。於此，我也只能粗略的把一些特質介紹出來，尤其是著重於看看拓撲(topology)如何神奇地進入我們的緊閉工程中。

弦緊閉的最基本概念乃在於尋找一具閔可斯基空間(M_4)與一六維緊閉流型(Compact manifold)K^6直接乘積(direct product)的基態解(ground state solution)。因此如果K^6足夠小的話(例如蒲郎克長度)，則我們便可透過Kaluza-Klein程序得到一個有效的4維物理。先入為主的觀念很可能使我們誤認為這是個複雜的微分方程問題，其實這只是道拓撲習題而已！現在讓我們看看事情是怎樣發生的吧。考慮二維的超弦方程，大致上可簡化為：

$$R_{\alpha\beta}=0 \tag{9}$$

其中$R_{\alpha\beta}$乃2維規度的Ricci張量，但於我們要討論的2維空間中，(9)式只表示一個平的規度而已，現在再讓我們看看如何在下列三個2維流型中對方程(9)求解

(a)　　(b)　　(c)

2維緊閉(Compact')流型的一個特質乃其把手(handle or genus)的數目是

$$1-\frac{1}{4\pi}\int d^2x\ \sqrt{g}\ R \tag{10}$$

如果R為零則只有一個把手了，那我們馬上可以看出只有在流型(b)(即torus)上方程(9)才能有解，多於一個把手的緊閉流型變成所謂方程(9)的解的 topological obstruction了。在這種述語下，看來好像是微分方程的式(9)其實只是個拓撲方程而已！

這個可以推廣到高維空間的topological obstruction 數學家稱之為第一陳類(first Chern class)。用比較簡單的拓撲語言來說，超弦在緊閉流型中的基態解便是first Chern class 歸零，其中一類稱為Calabi-Yau的流型就具first Chein class歸零的性質。

每個不同的Calabi-Yau空間都對應於不同的有效低能物理，而K^6如何決定其低能物理現象的問題又再次呈現拓撲性質。例如，粒子的家族(flamies)數(E_6中表象27的個數)就等於K^6中無法收縮(noncontractible)的四維面！這現象究竟怎樣產生的呢？

首先，讓我們先檢查一下，描述$E_8\times E_8$ gauginos的10維狄拉克(Dirac)方程：

$$\not{D}^{(10)}\Psi=0 \tag{10}$$

$\not{D}^{(10)}$乃10維的規範協變狄拉克算子，把$\not{D}^{(10)}$投影在4及6維的子空間中，或(10)可改寫成

$$(\not{D}^{(4)} + \not{D}^{(6)}) \Psi = 0 \qquad (10)$$

將Ψ對K^6具本徵值 λ_k 的harmonic Ψ_k 展開，則可得到

$$(\not{D}^{(4)} + \lambda_k) \Psi_k = 0 \qquad (11)$$

奇妙的事情產生了，那些 6 維本徵值 λ_k在 4 維時空中看來只是個質量為 λ_k 的費米粒子而已！如 λ_k 不為零時，普遍來說將大約等於蒲郎克質量（ 10^{19}Gev ）了，因此在 4 維時空中看到古典質量為零的解，只是 6 維K^6中的零態（ zero mode ）

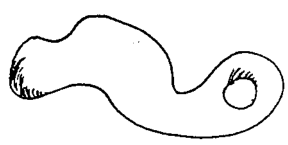
$$\not{D}^{(6)} 4_0 = 0 \qquad (12)$$

（我們希望透過量子修正可以賦予那些古典質量為零的粒子一個小小質量）。

小心分析一下方程式(12)，不難發現零態方程其實就是一個harmonic two form 方程

$$\not{D}\Psi = 0 \Leftrightarrow \nabla [_a V_{bc}] = 0 = \nabla^a V_{ba} \qquad (13)$$

其中$V_{ab} = - V_{ba}$與Ψ呈線性關係，而普遍來說代表harmonic p form 個數的P^{th} Betti 數（ b_p ）是個拓樸不變量。例如，一個任意變型的 torus

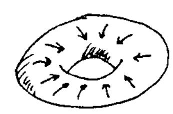


永遠只有 2 @harmonic one form ，i.e.$b_1 = 2$，總結來說粒子的家族數與 harmonic two form數目呈一一對應性。

在一個具方向性（ orientable) 的n維流型中我們可找到一個叫Poincare Duality 的 isomorphism 對應於harmonic p form與n-p form之間，其中

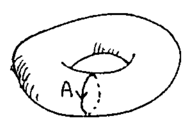
$$b_p = b_{n-p} \qquad (14)$$

更進一步，我們可找到一個De Rham Isomorphism 對應於harmonic m-form 於無法收縮的m維面，例如，以torus 來說，在其表面上有兩個如下圖所示的harmonic one form

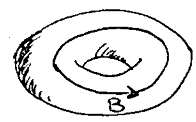


及

而其對應的無法收縮環（ non-contractible loops ）則如下圖的：



及



把上述所有的資料加起來，我們馬上可得到每一個 4 維時空中的粒子家族都對應於一K^6中一個無法收縮的 4 維面的結論。這種對應在計算粒子家族間的Yukawa 偶合是常重要的：

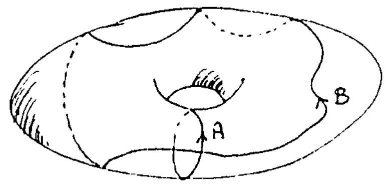
粒子家族間的Yukawa偶合是可以從10維偶合常開始做維次遞減而求得，這個連結 4 維粒子第i^{th}，j^{th}及k^{th}個家族的Yukawa Coupling g_{ijk}則可表成各粒子家族對應的零態在K^6上的交疊(overlap ）積分

$$g_{ijk} = \int_{K^6} d^6x \sqrt{\mathrm{Det}\, g}\ \Psi_i \not{A}_j \Psi_k \qquad (15)$$

這是個非常困難的積分，以目前的技術來說，我們幾乎是不可能從式(15)中求取任何訊息的，但幸運的是，這個積分卻剛好是個表示相交（ intersection)次數的拓樸不變量。

那什麼是相交次數（ intersection number ）呢？讓我們先檢查一下上述 torous 中無法收縮的環A

與環B的情形。



如果我賦予環及其相交一個方向性的話，則我們不難發現，無論我們如何形變(deform)環A及環B，他們永遠只能相交一次：事實上相交次數就是個拓樸不變量。而式(15)只不過是K^6上相交次數的一個明顯公式而已。現在要計算g_{ijk}可就簡單到只需要數一數第 i^{th}, j^{th} 及 k^{th} 個無法收縮面的相交次數了！

繼續用這種方式，我們基本上可透過K^6的拓樸性質求得所有低能物理量。例如規範對稱破壞形式(gauge symmetry breaking pattern)則可從環群(group of loops)$\pi_1(K^6)$中求得。在普通的Kaluza-Klein理論中，拓樸並沒有扮演這麼重要的角色，或者我們應該問：為什麼超弦對我們這麼好呢？

(VI) 結論：

到目前為止，超弦是唯一能在重力變得異常重要的蒲郎克長度(10^{-33} cm 或 10^{19} Gev)後提供物理消息的理論，況且，其結構又是如此嚴僅及完美無瑕，我們實在很難相信眞實世界與此無關的！當然到目前為止，超弦還在萌芽階段。我們也無法從其中得到些定量的低能物理，這到底是何種理論，為何如此，也實在是一無所知。同時，對這理論非微擾(Nonperturbative)部份的瞭解仍然遙遠得很的。暫時我們只好忍耐一下自己的無知了！

參考文獻

1. S. Weinberg, “Summary and Out book” UTTG-22-86
2. P. Candelas, G. Horwitz, A, Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. B258, 74 (1985)
3. Strominger in Unified String theories Ed. by D. Gross and M. Green (1986).
4. J. Schwarz, “Superstrings- A progress Report”, CALT-68-1417.

(余海禮，現為中央研究院物理所副研究員)