

賭博、擴散與擴散實驗

文/陳義裕

摘要

將一滴墨水滴入裝水的透明玻璃瓶中，結果墨滴會快速地在水中暈開。打開一瓶香水，在房間另一角的人很快就會聞到味道。很多人把這些現象歸諸於擴散。你是其中的一位嗎？

一、一場賭博的數學分析

雖然本文的目的是要討論擴散實驗，但是為了說明起見，我們將先假藉科學之名，來進行一系列的賭博實驗。這一場賭局的規則是這樣的：我們首先選擇一個公正的銅板，然後連擲 100 次的銅板。每當銅板出現正面的時候，我們就會多贏一塊錢，可是當銅板出現背面的時候，我們就會輸一塊錢給莊家。我們的問題是：在連擲 100 次的銅板後，究竟我們是賺賠多少錢呢？

在真正進行這項實驗之前，我們可以先利用直觀來分析整個事件。假設我們以+1 代表銅板出現正面，而以-1 代表銅板出現負面，同時用 m_j 這個符號來代表第 j 次擲銅板所出現的結果($m_j = \pm 1$)，則在連擲 100 次銅板後，我們淨贏的錢數就是

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_{100}$$

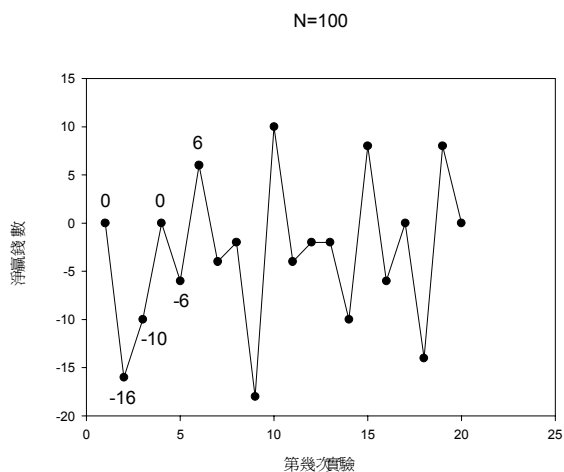
可是由於 m_j 這些符號是以+1 和-1 的方式隨機出現，

所以我們預期 m_1 、 m_2 、 \cdots 、 m_{100} 會互相抵消。因此直觀告訴我們，

$$M \approx 0$$

這表示在這一場賭局之中，我們並不預期自己會贏錢或輸錢。

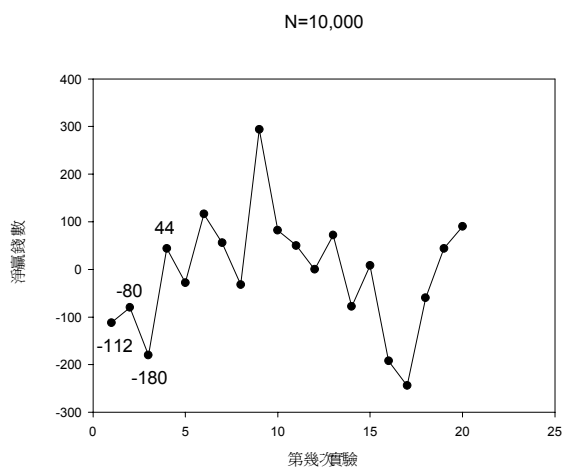
現在讓我們來進行真正的實驗。為了讓整個結果有一點點統計上的意義，我們決定進行 20 次的實驗，並把實驗的結果畫在圖一中。(這個圖的橫軸代表第幾次實驗，縱軸代表淨贏的錢數。)



圖一

從這個圖中我們可以看出來，實驗結果和我們直觀的預期是相符合的：在單次的賭局中，我們或許是有贏有輸，但是整體來講，則是輸贏打平。

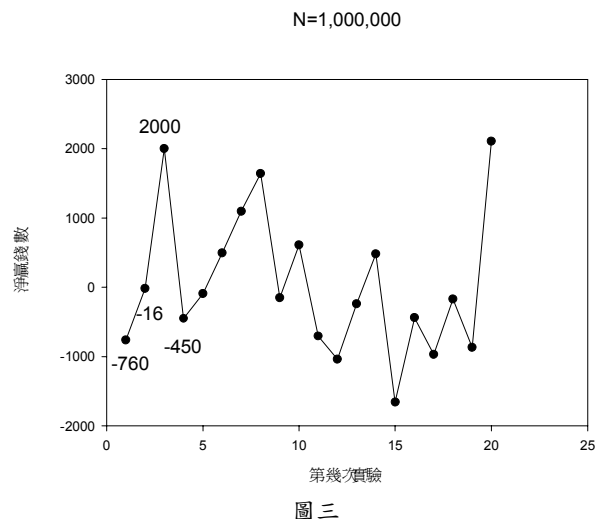
有了前面的經驗，我們接著把賭博的時間延長：在每一次的賭局中，我們將連擲 10,000 次的銅板！圖二所顯示出來的就是我們實驗的結果。



圖二

雖然從這個圖中我們還是可以看出輸贏打平的現象，但是我們同時也發現了一個有趣的現象：本圖中所顯示出來的輸贏幅度顯然比圖一中的輸贏幅度還大。

如果我們把賭博的時間更加延長，改成連擲 1,000,000 次的銅板，那又如何呢？我們把這個結果顯示在圖三中。



再一次地，我們注意到本圖中所顯示出來的輸贏幅度顯然比前面兩個圖中的輸贏幅度都大！

以上三場賭局所告訴我們的資訊是：雖然我們預期輸贏會打平，但是隨著賭博時間的延長會有一個很重要的副效應發生——我們輸贏的幅度也會跟著增大。(賭博誤人是否和此有關？) 換成數學的說法，這表示 $M \approx 0$ 是一個太粗糙的近似。一個更好的近似應該是

$$M \approx 0 \pm \text{輸贏幅度}$$

而且上式中的「輸贏幅度」會和擲銅板的次數有關；擲銅板的次數越多，輸贏幅度就越大。

可是輸贏的幅度究竟和擲銅板的次數有什麼樣的定量關係呢？假設我們連擲 N 次的銅板，則

$$\begin{aligned} (\text{輸贏幅度})^2 &\approx M^2 = (m_1 + m_2 + \cdots + m_N)^2 \\ &= (m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_N^2) + 2(m_1 m_2 + m_1 m_3 + \cdots + m_2 m_3 + \cdots) \end{aligned}$$

由於 m_1 、 m_2 、 \cdots 、 m_N 彼此之間沒有什麼關係，所以我們預期第二組括弧中的各項差不多會正負相消。

所以

$$\begin{aligned} (\text{輸贏幅度})^2 &\approx (m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_N^2) \\ &= (1 + 1 + \cdots + 1) = N \end{aligned}$$

所以我們有了一個很重要的結論：

$$\text{輸贏幅度} \approx \sqrt{N}$$

以上這個近似的公式到底有多好呢？讓我們把它應用到圖一的數據中：

$$\text{平均輸贏幅度} = \sqrt{\frac{0^2 + (-16)^2 + (-10)^2 + \cdots}{20}} = \sqrt{67.8} = 8.2$$

同理，對於圖二及三的數據我們分別有

$$\text{平均輸贏幅度} = \sqrt{\frac{(-112)^2 + (-80)^2 + (-180)^2 + \cdots}{20}} = \sqrt{14,435.4} = 120$$

及

$$\text{平均輸贏幅度} = \sqrt{\frac{(-760)^2 + (-16)^2 + (2000)^2 + \cdots}{20}} = \sqrt{1,014,256.6} = 1007$$

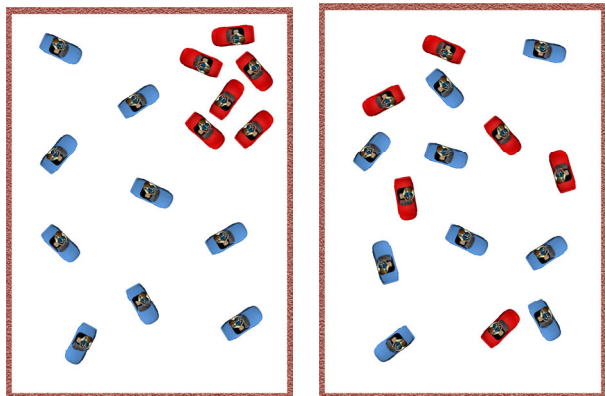
由於我們的理論預測分別是 $\sqrt{100} = 10$ 、 $\sqrt{10,000} = 100$ 及 $\sqrt{1,000,000} = 1,000$ ，所以實驗結果和理論其實是相當吻合的。

二、從賭博學擴散

一旦了解了以上賭博實驗的這個特性，我們就可以把它套用到擴散現象的研究上。為什麼呢？我們已經知道物質的組成原子或分子隨時都在振盪與運動，例如空氣中的分子可能以每秒數百公尺的速度在「飛行」。但是這些粒子並不是在毫無阻撓的環境下運動：由於粒子具有體積，所以它在飛行途中可能與別的粒子相碰撞。一旦和別的粒子碰撞，它的運動速度就會改變。這有點像是在遊樂園中開碰碰車一樣。

假設遊樂園中的碰碰車有紅色以及藍色兩種，而且一開始的時候我們還故意把紅色車聚集在某個角落(圖四 (a))，接著讓小朋友盡興地去開所有的碰碰車，那麼經過一段時間後，紅色車就會遍佈各地(圖四

(b))。當不斷碰撞的原子與分子展現出類似這樣的現象時，我們就把它叫做「擴散」。換句話說，擴散是粒子經由互相碰撞而導致物質有從高濃度的地方慢慢散佈到低濃度地方的現象。



圖四 碰碰車場俯瞰圖 (a) 紅色車原先聚集在角落。(b) 經過一段時間後，紅色車會遍佈各地。

爲了瞭解擴散的速度有多快，我們就必須分析粒子的這種碰撞行爲。爲了達到這個目的，我們可以設計一個簡化的一度空間模型，追蹤一顆特別的粒子，讓它以一單位的運動速度在一條直線上運動。每當它和別的粒子發生碰撞後，運動方向就會相反。由於是不是會有別的粒子擋在路上來迫使它改變運動方向是一種隨機的過程，所以我們可以利用擲銅板的動作來模擬碰撞事件會不會發生：當粒子從原點出發時，它會先擲一個公正的銅板，以便決定下一瞬間是要朝右或朝左行進一個單位的距離；如果銅板出現正面它就朝右，否則便朝左行進。走到下個位置之後它就又重複相同的動作。在這個模型中，粒子每次變換行進方向就對應於和別的粒子發生一次碰撞。

如果我們讓這個粒子走 N 段的時間，那麼我們預期它會在離原點多少距離的地方出現呢？假設我們以 $+1$ 代表粒子往右走一步，而以 -1 代表粒子往左走一步，同時用 m_j 這個符號來代表粒子在第 j 步時根據擲銅板的結果所行進的位移，則在連走 N 步後，粒子所在的座標位置顯然是

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$$

你可以看得出來，這個模型和前面的賭博實驗根本是同一個模子的翻版！所以我們很容易就會想到

$$\text{粒子平均偏離原點的幅度} \approx \sqrt{N} \text{ 個單位距離}$$

雖然我們是利用一度空間的模型來推導出以上的結果，其實這個結論對於兩度平面或三度空間也都是成立的。

假設空氣中氣體分子的平均運動速率是 v ，而且它的平均自由徑是 l (平均自由徑指的是該粒子平均每走多少距離後就會和另外一顆粒子相碰撞)，那麼在經過時間 t 之後，粒子已經碰撞了約 $N = vt/l$ 次，因此我們預期

$$\text{粒子平均偏離原點的幅度} \approx \sqrt{N}l = \sqrt{\frac{vt}{l}}l = \sqrt{vlt}$$

三、這算是擴散實驗嗎？

在掌握了擴散的理論基礎之後，我們現在就可以開始檢討數個擴散現象的傳統示範實驗。一個常常被舉出來的例子，是在教室的前方打開一瓶氨水(阿摩尼亞)或者是香水，等上一小段時間(頂多數分鐘)，然後坐在教室後排同學就會聞到味道。另外一個例子則是在透明玻璃瓶中裝水，然後滴入一滴墨水，接著就可以動態地觀察墨水在水中暈散開來的情形(參見圖五)。如果玻璃瓶裏面的水溫比較高，我們還會發現墨水在水中暈散開的速度比較快。有些人對這種現象的解釋是：溫度高代表粒子的運動速度比較快，因此擴散的速度當然會變快。



圖五 滴入水中的墨水會快速暈散開來。

以上這些示範實驗雖然很吸引人，而且好像都可以用擴散現象來作定性的描述，**但是當我們用定量的方式去仔細研究的時候，卻會發現它們都是站不住腳的。**

首先讓我們來檢討氨水的實驗。氣體分子的運動速度頂多約是 $v \approx 10^3 \text{ m/s}$ ，它的平均自由徑大約是 $l \approx 10^{-7} \text{ m}$ 。如果我們等上三個小時 ($t \approx 10^4 \text{ s}$)，則根據前面推導出的公式，我們就會有

$$\begin{aligned} \text{粒子平均偏離原點的幅度} &\approx \sqrt{vlt} = \sqrt{10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7}} \\ &= 1\text{m} \end{aligned}$$

等了這麼長的時間，氨水分子竟然才擴散一公尺的距離，所以擴散絕對不是讓後排的同學可以聞到氨水味道的主要機制。

那玻璃瓶的實驗又如何呢？一樣慘！因為水比空氣密多了，所以分子的平均自由徑還要小上三個數量級^註，而且墨水分子比較笨重，所以運動速度也會慢上一個數量級，再加上觀察的時間大約在 1 秒左右，所以計算出來的擴散距離是

$$\begin{aligned} \text{粒子平均偏離原點的幅度} &\approx \sqrt{vlt} = \sqrt{10^2 \cdot 1 \cdot 10^{-10}} \\ &= 0.01\text{cm} \end{aligned}$$

由於實驗顯示墨水在一秒的時間內就會在水中暈散開 1 公分左右的距離，我們唯一能夠獲得的結論就是：

擴散並不足以解釋我們觀察到的現象。

綜合以上的討論，我們便理解到：

擴散在日常生活的尺度之下是一種非常、非常緩慢的過程，只有在控制良好的環境中，我們才有辦法利用巨觀的實驗來證明擴散現象的存在！

註：水實在是太密了，粒子在水中幾乎是沒有自由運動的空間，所以嚴格地說，平均自由徑的概念並不很適用。但是做為數量級的估計應該仍可接受。

四、可是你如何解釋這些實驗？

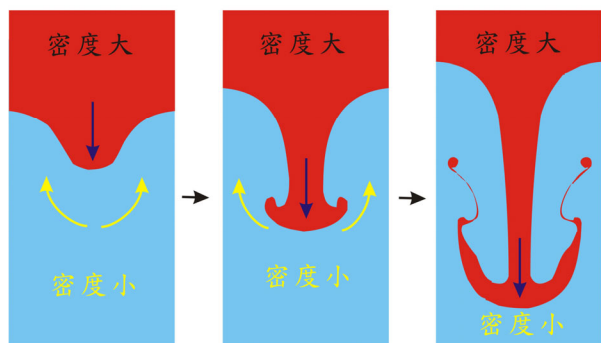
當我把以上的定量分析講解給一些朋友聽的時候，他們都基於禮貌沒有立刻反駁。但是不反駁並不代表他們就同意我的說法，因為他們接下來的反應多半是：「可是你不可否認這些實驗裏面還是有擴散的作用呀！」這就讓我想起了一個故事：有個饑腸碌碌的人一口氣連吃了八個麵包，等到第九個麵包被他吃下一半的時候，他才終於有了飽足感。於是他若有所思地說：「早知道吃這半個麵包會飽，我就先吃掉它了！」擴散作用在這些實驗中所扮演的角色就像那半個麵包。

為了說服讀者，我們自然得把另外那八個(長久以來遭人忽略的)麵包給找回來。首先，我們得建立一個非常重要的概念：我們在日常生活中的一舉手、一投足或者是一顰一笑都會造成空氣的流動，而且這些氣流就像水流一樣可以被近似成是黏滯力很小且不可被壓縮的流體。換句話說，一旦我的任何動作造成了氣流之後，它通常就會推開周圍的空氣，在室內「流竄」，久久才會平息。如果肉眼能夠看見這些氣流的話，我們一定會很訝異地看到室內的空氣怎麼動得這麼厲害呀！當然，這種現象也是有辦法觀察到的。如果室內的空氣不太乾淨，夾帶有一些灰塵或者棉絮的話，那麼在太陽光的照射下，我們就會看到棉絮與灰塵在氣流的帶動下翩翩起舞，煞是好看。

當我們在教室做氨水的示範實驗時，後排的同學之所以很快就會聞到臭臭的味道，其實都是因為室內

的氣流所造成的。氣流是一種很有效的物質與熱能的傳播機制。一股速度是 10cm/s 的氣流，花不到兩分鐘的時間就會將物質傳到 10 公尺遠的地方。這種時間的數量級和我們的實驗觀察才是吻合的。

那麼墨水在玻璃瓶裏面的實驗又是怎麼一回事呢？其實這和一個很出名的流體現象有關：瑞利—泰勒不穩定性(Rayleigh-Taylor instability)。墨水的密度比普通水大，當我們把密度比較大的液體擺放在密度比較小的液體上方時，任何一個小小的擾動，都很容易驅使上方的液體侵入下方的液體中(因為「頭重腳輕」嘛)。可是因為這些液體都是不可壓縮的，所以受到「侵犯」的低密度液體會因被排擠的結果而往兩側流開。因為這個緣故而導致的對流也會順便把一部份入侵的高密度液體帶走。被帶到新環境的高密度液體並不會很安分，因為它仍會感到「頭重腳輕」。於是，同樣的「侵入→流開」的戲碼再度上演(參見圖六)。這樣的過程反覆幾次之後就造成了我們所看到的墨水暈開來的現象。其實喜歡喝冰水的朋友或許曾注意到，當冰塊在水杯內融化時也會產生類似的現象，這是因為貼近冰塊的水密度比周遭的水大，所以有下沉的趨勢。



圖六 把密度大的液體擺在密度小的液體上方時，任何一個小小的擾動，都很容易驅使上方的液體侵入下方的液體中。這個不穩定性會因液體的推擠與流動而很快地散佈開。

可是為什麼墨滴在溫水中暈散開的速度會比較快呢？這有兩個原因，第一是高溫的水本身很容易產生熱對流現象，從而有助長墨滴暈開來的效果。第二個原因則是因為高溫的水密度比較低，所以墨滴也相對地較易「向下沉淪」。

既然這篇文章一直強調理論解釋必須有定量上的吻合才算數，所以我們仍得了解瑞利—泰勒不穩定性的時間尺度為何。這很容易估計：假如一滴墨水的大小是 L ，那麼滴入水中的墨水只會對它周圍 L 距離內的水造成比較明顯的水壓改變。更遠的水所受影響不大。事實上，這個水壓的改變量大約在 $\Delta\rho gL$ 的數量級，其中 $\Delta\rho$ 是兩液體的密度差(墨水和純水的密度只相差一點點，所以若以 ρ 代表它們的平均密度，則 $\Delta\rho \ll \rho$)，而 g 是當地的重力加速度。現在考慮位於墨滴正下方的一塊邊長約是 L 的水塊。這個水塊的下表面因為離墨滴已有一段距離，所以水壓大致上並沒有改變；但是它的上表面因為緊鄰墨滴，所以壓力會增加大約 $\Delta\rho gL$ 的數量級。這個上下壓力的不平衡是造成水塊會被往下排擠流開的原因。根據牛頓第二運動定律，這個小水塊往下流開的有效加速度 a 大約滿足

$$\begin{aligned} \text{質量} \cdot \text{加速度} &\approx \text{上下壓力差} \cdot \text{截面積} \\ \Rightarrow (\rho L^3) \cdot a &\approx (\Delta\rho gL) \cdot L^2 \\ \Rightarrow a &\approx \frac{\Delta\rho}{\rho} g \end{aligned}$$

水塊受到這個加速度而運動 t 時間後就會有一個淨位移

$$s \approx \frac{1}{2} at^2 = \frac{\Delta\rho}{2\rho} gt^2$$

而當 $s \approx L$ 時就代表墨滴已經有效地侵入水中了。換句話說，墨滴暈散開的時間尺度大約是

$$t \approx \sqrt{\frac{\rho L}{\Delta\rho g}}$$

假如 $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-3}$ ，我們發現一滴 $L \sim 1\text{ cm}$ 的墨水暈開的時間大約是

$$t \approx \sqrt{\frac{0.01}{10^{-3} \cdot 10}} \approx 1\text{ s}$$

這樣的時間尺度顯然才是和實驗結果相吻合！

五、擴散對於短距離的物質散佈很有效！

分析完以上這些實驗之後，你可能已經發現它們的一個共同特徵，那就是在這些實驗中，將物質散播

開來的主要機制都是靠著流體的巨觀運動。因此，要真實地看到擴散作用的效果，我們一定要排除流體的流動。

其實，氣體在人類肺臟中的交換，最主要就是靠擴散作用。這是因為肺的氣管分岔很多，而分岔末端的氣管口徑都極小，此時氣體根本無法在裏面流動，所以物質在此地的交換只能靠擴散作用。

「可是，你不是說擴散是一種很緩慢的過程嗎？為什麼人類會演化出這麼沒有效率的肺臟呢？」

其實並不然。一旦有很多分岔的氣管以及肺泡，我們便可以大量增加肺與空氣的接觸面積，這樣就可以使我們一口氣就交換了很多氣體。不只如此，擴散作用只有在**巨觀**的尺度之下才是一種緩慢的過程，**當距離很短時，擴散其實是一種快速有效的物質散佈機制**。這一點，我們直接從

$$\begin{aligned} \text{粒子平均偏離原點的幅度} &\propto \sqrt{\text{擴散時間}} \\ \Rightarrow \text{擴散時間} &\propto (\text{擴散的距離})^2 \end{aligned}$$

便可看出。(例如：把擴散的距離代 0.1 這個數據時，它的平方是 0.01——更小了；可是若把擴散的距離代成 10 時，則 10 的平方卻是 100——這就很大了) 從

這種觀點看，我們不得不承認肺臟的演化其實是很神奇的！

由於擴散作用對於小範圍內的物質傳播非常有效，因此它和細胞的生命現象息息相關——細胞內外的物質交換都可見到擴散的蹤影。不過你不要因此就誤認為擴散作用在這裏就可以「升級」扮演那八個麵包的角色！因為生物細胞還發展出主動運輸物質的能力呢！當然，這已完全超出我的能力之外了，所以我最好就此打住，免得散佈更多錯誤的訊息。

本文原載於研習資訊雙月刊第 22 卷第 4 期，經作者及研習資訊雙月刊同意轉載

作者簡介

陳義裕

台大物理系教授，研究方向為非線性力學。目前並從事教育部版本之國中自然與生活科技課本之編寫。

E-mail: yychen@phys.ntu.edu.tw