額外維度模型中的對稱破缺機制

文/張嘉泓

本文首先介紹對稱性、場論中的自發對稱破缺以及希格斯機制。接著討論額外空間維度模型的基本架構；當額外空間是有邊界的如線段一般，透過邊界條件的定義，一個新的對稱破缺機制可以被建立。最簡單的方法是從一個無邊界的空間出發，利用 Orbifold Projection 將期限縮為有邊界的空間，場的邊界條件便由場的 Orbifold 轉換性質決定。我們說明這種方法如何破缺對稱，並介紹它在大統一場論、超對稱理論以及電弱對稱破缺的應用。

一、對稱性與對稱破壞

對稱性原則可以說是現代粒子物理最有用的一個工具。系統的對稱轉換（Symmetry Transformation）不變性（Invariance）性可以限制它的拉氏函數（Lagrangian）的形式，決定哪些項可以出現在拉氏函數中，因此也就決定了系統的動力行為，限制了相關的物理參數（Parameter）的數目。一個最有名的例子，就是狹義相對論中，羅倫茲轉換不變性便限制了拉氏函數中只能包含純量（Scalar）項，所以一個自由的基本粒子唯一的物理參數便是質量。

此對稱轉換如果與時間無關，我們稱之為整體對稱（Global Symmetry），基本粒子的世界中有很多整體對稱，例如強作用力具有整體同位旋 SU(2)轉換對稱，這個對稱大致上就是將質子與中子視為二重態（Doublet）時，如電子自旋向上及向下態一般，所對應的旋轉對稱。整體對稱性的最重要的結果就是對應的守恆量，所以對稱性的發現常是來自在反應中觀察到的守恆量。如果對稱轉換與時間有關，也就是在不同時間物理量作不同的轉換，我們稱之為定域對稱（Local Symmetry）或規範對稱（Gauge Symmetry）。要求定域對稱通常會需要引進新的自由度，在場論中這個新的自由度就以一個四元向量場 $A_\mu(x)$ 的形式出現，例如複數場 $U(1)$相角變換的定域對稱就必須引入光子場，這樣的場就稱為規範場（Gauge Field）。最重要的是，規範場自己以及與其他物質的交互作用就被規範對稱完全決定了，所以常常有人說規範場例如電磁場、膠子場的存在與其遵守的物理定律可以用規範對稱性來「解釋」，就是這個道理。現在已經知道，自然界中四種基本作用力除了重力還有些爭議，其他三種都是由規範場所媒介。

然而對稱性代表一種平等，或說單調，但是顯然自然界不是真的如此平等而單調的，強作用力雖然平等看待質子與中子，但是質子與中子的質量顯然並不相等。又如電磁力與弱力統一之後的 $SU(2)\times U(1)$規範場論，媒介弱力的規範粒子 $W^\pm$、Z 有很大的質量，而 Z 波色子的孿生兄弟光子卻是無質量的。所以上帝似乎喜歡與人類玩猜謎的遊戲，對稱性有時在表面上是看不出來，而隱藏在不對稱的現象之中，換句話說，對稱性是被破缺的（Broken Symmetry）。破缺對稱最簡單的一個辦法就是直接在系統的拉氏函數中加入幾個在對稱轉換下不是不變的項，例如質子與中子的質量差，就是來自 u-d 夸克質量差的一個同位旋 $SU(2)$ 不對稱的質量項。當然，如果這個破缺項太大，或是破缺項太多，那麼談這個對稱性就沒有太大意義了。否則，物理學家就能想辦法把對稱與不對稱的部分及其效應想辦法分離開來討論分析，這就是近似對稱（Approximate Symmetry）的想法。

但對稱破缺在量子場論中卻遇上新的障礙，直接在拉氏函數中加入破壞項會有嚴重的副作用。這和量子場論的重整化（Renormalization）有關：量子場論在量子修正的計算上出現許多無限大的結果，這些無限大都是出現在對虛粒子動量積分時，高能量的貢獻。然而物理學家發現如果假設拉氏函數中的參數（Parameters），例如質量、耦合常數等原本就是無限

大，那麼在某些理論中就可以抵消掉計算中出現的無限大，也就是所有可觀察量最後的計算結果都是有限的，這樣的理論稱為可重整化（Renormalizable）。這樣的方法聽起來非常奇怪，可是並不是非常不自然。計算中的無限大起因於虛粒子動量趨近無限大時的貢獻，但是假設我們的理論可以適用於無限大動量或是無限小距離的物理範疇顯然是更加不自然，所以可重整化是表示我們對無限小距離的物理世界的無知可以被吸收到拉氏函數的有限個參數之中，所以這些參數對無限大動量的物理非常敏感，因此是無限大。但是只要所有計算出來的預測都是有限值，這樣的理論就可以有效地（Effectively）來描述某個能量範圍的基本粒子物理，所以是一個有效場論（Effective Field Theory）[1]。一個對稱的理論產生的無限大也是對稱的，所以吸收它們所需要的參數也對應到對稱的項。但是如果用一個拉氏函數的破缺項來破缺對稱，所產生的無限大就可能需要其他非對稱項的參數才能吸收，這些新的非對稱項又產生新的無限大，需要新的參數來吸收，於是一發不可收拾。結果通常所有的非對稱項都必須被引入，那麼原來理論的對稱性就完全蕩然無存了。所以可以被允許的破缺項必須符合某些條件，我們稱之為 Soft Breaking（技術上的意思是，破缺項的參數的因次必須大於等於 0）[2]。

有些時候，隱藏對稱性的方法還可以更狡猾更微妙些。我們可以讓對稱的系統自己來破缺對稱，這樣的機制就稱為自發對稱破缺（Spontaneous Symmetry Breaking）。最關鍵的想法是，對稱的拉氏函數或漢米爾頓量並不一定要求它的基態或真空必須遵守一樣的對稱性，這樣的機制在固態物理的磁化現象中已經被廣泛運用。在粒子物理中通常用一個純量場 Φ 來實現自發對稱破缺，考慮一個複數純量場 Φ，它的位能寫成：

$$\mu|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4 \qquad (1)$$

很明顯地，此位能有一 U(1)對稱：$\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$。如果參數 μ 是正數，位能的最小值在 $\Phi = 0$，所以基態依然是 U(1)對稱；但是如果參數 μ 是負數，位能的最小值並不是在 $\Phi = 0$，而是發生在任一滿足 $|\Phi| = \sqrt{-\mu/\lambda}$ 的 Φ 值，所以可能的基態就有無限多個，形成一個連續區（Continuum），選擇任一 Φ 基態都不再遵守 U(1)對稱。當被破缺的對稱是整體的，沿著連續區基態方向的震盪，可以幾乎不費能量就激發，這樣的模式便對應一個無質量的 Goldstone 波色子。但當被破缺的對稱是定域的，Goldstone 波色子會被規範場所吸收，使得規範子得到質量，此質量與 Φ 的真空期望值 $|\Phi| = \sqrt{-\mu/\lambda}$ 成正比。這樣的機制，稱為希格斯機制，純量場 Φ 就稱為希格斯場。

自發對稱破缺機制的巧妙之處在於，對稱破缺發生在低能的基態，所以較輕的粒子質量會反映此對稱的破缺。但是在能量較高的領域，基態的性質並不重要，就好像從高空向下看，地面的細節是看不清楚的，因為拉氏函數仍是對稱的，所以高能的行為仍然遵守對稱性，重整化的性質就是如此，所以只要破缺前的理論是可重整的，破缺後也是可重整的。現在我們已幾乎可以確定，電磁力與弱力統一的 $SU(2)\times U(1)$規範對稱是自發對稱破缺成為 $U(1)_{EM}$，而使 $W^{\pm}$、Z 得到質量，只是希格斯粒子一直還沒有發現。

二、額外空間維度

從日常生活經驗，我們似乎相當確定空間的維度有三個。然而直覺的經驗也有可能欺騙我們：或許額外維度的空間是有限而非常微小的，或許我們的世界是被据限在三維，只有某些特別的自由度才能感覺到額外維度的存在。從 1996 年以後，基本粒子物理學家開始對具有額外空間維度的超越標準模型發生很大的興趣 [3]。1996 年 Arkani-Hamed、Dimopoulos 與 Dvali 提出了一個想法（ADD 模型）[4]，假設宇宙有 3 維無限空間和 n 維有限的額外維度（Extra Dimensions），所有標準模型粒子都被据限在一個 3 維無限空間的膜（Brane）空間中，只有重力場可以傳播到 n 維的額外維度之中。因此所有標準模型的實驗都只能看到 4 維

時空，交互作用與距離的關係服從平方反比定律。

現在我們用一個最簡單的例子來說明額外維度模型的基本特徵。假設只有 1 個額外空間維度，座標以 y 標記，因為是第五個維度，也寫成 x^5。一般以希臘字母像 μ、$\nu = 0,1,2,3$ 來作為四維時空 x^μ 的上下標，以大寫英文字母像 M、$N = 0,1,2,3,5$ 來作為五維時空 x^M 的上下標。這個額外維度不能是無限的，所以必須想辦法限縮到一個緊緻（Compact）的空間，最簡單的方法就是要求週期性條件：將 y 與 $y+2\pi R$ 視為全同，如此 y 空間便形成一個半徑為 R 的圓 S_1。

考慮一個全域（Bulk）純量場 $\Phi(x^\mu,y)$，相對於被据限在膜上的膜場（Brane Field），全域場是可以傳播到所有額外空間維度之中的。但因為額外空間並不是無限的，所以場的擾動在這個方向並不能自由傳播，而是像駐波一般形成離散的振動模式（Mode）。在最簡單的週期性條件下：

$$\Phi(x^\mu, y) = \Phi(x^\mu, y + 2\pi R) \tag{2}$$

Φ 對 y 的相關可以用傅立葉級數展開：

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu, y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\phi_{n1}(x^\mu)\, e^{i\frac{n}{R}y} + \phi_{n2}(x^\mu)\, e^{-i\frac{n}{R}y}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\phi_{n+}(x^\mu)\cos\frac{n}{R}y + \phi_{n-}(x^\mu)\sin\frac{n}{R}y\right)\end{aligned} \tag{3}$$

四維場 $\phi_n(x^\mu)$ 與 $\Phi(x^\mu,y)$具有相同的量子數，在 y 方向像是具有動量 $\frac{n}{R}$。假設五維時空仍保有羅倫茲不變性, 那麼五維的能量動量必須滿足熟悉的相對論關係：

$$E^2 - |\vec{p}|^2 - \left(\frac{n}{R}\right)^2 = m^2 \tag{4}$$

對四維能量動量來說：

$$E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \tag{5}$$

所以四維場 $\phi_n(x^\mu)$ 描述的是一個質量為 $\sqrt{m^2+\left(\frac{n}{R}\right)^2}$ 的粒子。如果原始質量 $m=0$，此粒子的質量便是 $\frac{n}{R}$。所以一個全域場所描述的是一系列量子數相同的粒子，其質量以等差級數增加。這個現象是 Kaluza 和 Klein 在 1920 年代就發現的，所以這些粒子就被稱為 Kaluza-Klein States（KK States）。

Kaluza-Klein 粒子中包含了 $n=0$ 的無質量的零態（Zero Mode）。如果觀察的能量遠小於 $\frac{1}{R}$，也就是觀察的距離遠大於半徑 R，那麼，除了零態以外其他的 Kaluza-Klein States 都無法看見而可以忽略，而零態在 y 方向是常數，所以額外維度等於不存在，這就是為什麼當能量不夠高時，額外維度是觀察不到的。當觀察能量漸漸提高，Kaluza-Klein 態的效應便會一個一個顯現出來，質量等差增加的粒子群，便是額外維度在粒子物理實驗中最直接的信號。

請注意以上的討論適用於任何的全域場，而不只是純量場。例如 ADD 模型中的重力子場就是全域場 $G_{MN}(x^\mu, y)$，其中 $G_{55}(x^\mu, y)$ 在四維空間看來是一個羅倫茲純量場，$G_{5\mu}(x^\mu, y)$ 是四維向量場，4×4 的 $G_{\mu\nu}(x^\mu, y)$ 則是張量場，它們都包含一系列的 KK 態。$G_{\mu\nu}$ 張量場的零態就對應於無質量的重力子，而質量等於 $\frac{n}{R}$ 的重力子 KK 態就成為額外維度存在的訊號。當觀察距離小於 R 時，只有零態會貢獻，所以重力依然與距離平方成反比。我們可以找出五維 Planck 常數 M_*及四維 Planck 常數 M_{Pl} 之間的關係，考慮五維的 Hilbert-Einstein 作用量：

$$\begin{aligned}S_5 &= -M_*^3\int d^4x\,dy\,\sqrt{G^{(5)}}R^{(5)}\\ &= -M_*^3\int dy \times \int d^4x\,\sqrt{G^{(4)}}R^{(4)}\\ &= -M_{PL}^2\int d^4x\,\sqrt{G^{(4)}}R^{(4)}\end{aligned}$$

式中$G^{(5)}, R^{(5)}$分別是五維的 Metric 行列式及 Ricci 純量，在零態$G_{\mu\nu_0}(x^\mu)$與 y 無關時，它們就直接等於四維的相對應量。由上式可得

$$M_*^3 \int dy = M_{PL}^2 \qquad (6)$$

此式可以很容易地推廣到 n 個額外維度的情況：

$$M_*^{n+2} \times V_{(n)} = M_{PL}^2 \qquad (7)$$

$V_{(n)}$是額外空間的體積，如果$M_*^n \times V_{(n)}$很大，M_{Pl}就會比 M_*大很多。因為 Planck 常數決定重力的強弱，所以在四維世界量到的重力就比原來由 M_*所決定者弱很多。當額外空間的體積很大時，重力子就會有很大機會消耗在額外空間中，因為這樣的緣故，即使原來強度相當，測量的結果，重力就比其他作用力弱。

三、邊界條件與對稱破缺

除了 ADD 模型，物理學家也考慮額外維度空間很小，而標準模型粒子可以是全域場的情況，這類模型提供了很多特別的可能性與有趣的物理。以下所討論的對稱破缺機制便是在這樣的情況下建構出來的。

我們考慮整個時空可以寫成$M_4 \times C$，其中 M_4是四維明高斯基時空，C 是緊緻的額外維度空間。緊緻 C 的並不一定要是圓，另一種可能是線段。與圓不同的是，線段有兩個端點，形成邊界（Boundary），所以要在線段上定義全域場，必須同時定義它們在邊界上的行為，也就是邊界條件（Boundary Condition）。等一下我們就會介紹邊界條件的定義讓我們可以破壞對稱性。

要定義線段有一個很巧妙的方法，稱為 Orbifold Projection（這個方法在超弦研究已經有很長歷史，有關此方法的介紹可以參閱[3][9]）。我們依舊以五維時空為例來介紹。想法是從一個無邊界的緊致空間（例如圓 S_1）出發，利用作用於其上的離散轉換對稱（例如 Z_2或 Z_n），將轉換前後的點是為全同，因此得以限縮緊緻空間的範圍，這樣的操作在數學上稱為 Modding Out 或 Orbifold Projection。考慮額外維度空間 S_1，作用於其上最簡單的離散轉換便是如下的鏡射轉換 Z_2：$y \rightarrow -y$。如果將 S_1 中的點-y 與 y 視為全同，那麼實質上額外空間便被限縮為$0 \le y \le \pi R$的一個線段，這樣建構出來的空間稱為 S_1/Z_2。這個空間最特別的是鏡射轉換 Z_2在$y = 0$及$y = \pi R$兩處是映射到自己，所以形成兩固定點（Fixed Point），這兩固定點便是線段空間的邊界 O：$y=0$；O'：$y=\pi R$。

以上是利用 Orbifold Projection 由無邊界的 S_1建構出有邊界的 S_1/Z_2，而各個全域場在 Z_2下的轉換行為便自然地給出場的邊界條件。考慮 N 個有關的全域場，並將它們寫成一個 N 元行向量 Φ，在最普遍的情況下，Φ 本身在鏡射轉換 Z_2下並不一定要不變，只要物理不變即可。所以 Φ 可以作一線性變換，以 $N \times N$ 矩陣 Z 來標示：

$$Z_2 : \Phi(y) \rightarrow Z\Phi(-y) \qquad (8)$$

當我們將 Z_2轉換前後的點-y 與 y 視為全同時，Z_2轉換前後的場也視為全同：

$$\Phi(y) = Z\Phi(-y) \qquad (9)$$

因為 Z_2是鏡射，所以$Z^2 = I$。為方便起見，我們可以選取新的基底將矩陣 Z 對角化，而矩陣 Z 對角的元素便只能是±1。換句話說，在此基底下，場便可分類為偶性（Z_2 Parity Even）$\phi(y) = \phi(-y)$及奇性（Z_2 Parity Odd）$\phi(y) = -\phi(-y)$。這個分別在邊界上最重要，如果是奇性場，在邊界上：$\phi(O,O') = -\phi(O,O') = 0$這是 Dirichlet 邊界條件；如果是偶性場：$\partial_5\phi(O,O') = -\partial_5\phi(O,O') = 0$ 這是 Neumann 邊界條件。於是由矩陣 Z 自然地給定了全域場的邊界條件。而不同邊界條件各自剔除了一半的 KK 態，留下：

$$+: \ \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \qquad -: \ \sin\left(\frac{ny}{R}\right)$$

一個非常重要的結果是：奇性全域場沒有 $n=0$ 無質量的零態，它最輕的 KK 態至少有質量 $\frac{1}{R}$。

如果組成 Φ 的 N 個全域場性質相同，它們的理論通常會有一個整體 $SU(N)$或 $SO(N)$的對稱。假設它們的 $SU(N)$對稱五維拉式函數密度寫成：

$$\partial_M \Phi^+ \partial^M \Phi + V(\Phi^+\Phi) \qquad (10)$$

很容易就可驗證這個拉式函數密度在鏡射轉換 Z_2 下也是不變的（事實上矩陣 Z 也是 $SU(N)$的成員），所以我們可以利用上述的 Orbifold Projection 將額外維度空間緊緻化為一個線段。然而，如果矩陣 Z 不能對角化為 I，它與 $SU(N)$許多矩陣並不對易，這些矩陣變換便不再是系統的對稱性。假設 Φ 之中包含 m 個偶性場、N-m 個奇性場，彼此性質不再相同，所以原來的整體 $SU(N)$對稱就被破缺為 $SU(m) \times SU(N\text{-}m)$。這個對稱破缺機制在現象上與自發對稱破缺有一些相近之處，在能量低於 $\frac{1}{R}$ 時，只有偶性場有零態，其餘的 KK 態都可以忽略，所以 $SU(N)$對稱被破壞。當能量漸漸增加，其餘的 KK 態漸漸發揮效應。等到能量很高時，偶性場與奇性場的分別就變得並不重要，因為拉氏函數仍是對稱，我們觀察到的現象便是 $SU(N)$對稱的。

如果這個 $SU(N)$對稱是一個定域對稱，我們就必須引入規範場 $A_\mu{}^a$，拉氏函數密度寫成：

$$D_M \Phi^+ D^M \Phi + V(\Phi^+\Phi) \qquad (11)$$

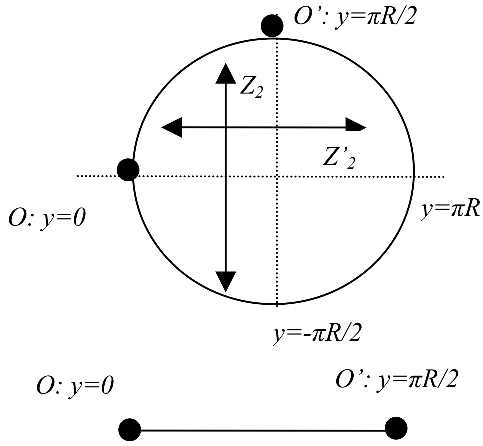
其中 $D_M \Phi = \partial_M \Phi + igA_M^a T^a \Phi$，$T^a$ 是 $SU(N)$的 Generator，在此表現為 $N \times N$ 的矩陣。為了使這個規範場論在鏡射轉換Z_2下維持不變的，我們要求規範場$A_\mu{}^a$ 在鏡射轉換 Z_2 作如下變換：

$$Z_2 : A_M^a(y) T^a \to Z\, A_M^a(-y) T^a Z = A_M^a(-y)\, \Lambda^{ab} T^b$$

這樣得到的規範場 $A_\mu{}^a$ 的線性變換 Λ^{ab} 稱為相對應李代數的一個 Automorphism。

$$Z_2 : A_M^b(y) \to A_M^a(-y)\, \Lambda^{ab} \qquad (12)$$

同理 Λ^{ab} 也可以對角化為只含± 1 的對角矩陣，在此基底下，規範場一樣被分類為奇性場及偶性場，只有偶性規範場會有無質量的零態，而奇性規範場在邊界上等於 0，所對應的規範對稱便被破壞。這個機制追本溯源是因為全域場 Φ 在邊界固定點上特別的邊界條件，限制了在邊界上可以容許的規範變換，對應於奇性規範場的規範變換在邊界上必須為零，所以在全域中維持的規範對稱，在邊界上只有一部分可以存活。有趣的是，從低能量的觀察角度看，此機制與希格斯機制一樣，最重要的特徵都是規範對稱被破壞的規範粒子得到了質量，不同的是，在此如果能量繼續升高，會又一系列的有質量規範子出現。



圖一　$S_1/(Z_2 \times Z_2')$

以上我們只考慮一個離散轉換對稱 Z_2，所以全域場在兩個邊界上的邊界條件必須一樣。為了打破此限制，我們可以再引入另一個離散轉換對稱 Z'_2，通常的選擇是：

$$Z'_2 : y \to \pi R - y \qquad (12)$$

或者用另一寫法：

$$Z'_2 : y - \frac{\pi R}{2} \to -\left(y - \frac{\pi R}{2}\right)$$

所以這個轉換可以看成是對於 $y=\frac{\pi R}{2}$ 及 $y=-\frac{\pi R}{2}$ 的鏡射，因此 S_1/Z_2 再經過 Z'_2 的 Orbifold Projection，線段又被限縮為原來一半長的線段 $0 \le y \le \frac{\pi R}{2}$，這樣的空間就被稱為 $S_1/(Z_2 \times Z'_2)$。現在一端邊界 O:$y=0$ 是 Z_2 的固定點，另一端邊界 O': $y=\frac{\pi R}{2}$ 則是 Z'_2 的固定點。如此全域場在 Z_2 及 Z'_2 轉換下根據不同的矩陣 Z、Z' 變換，所以在兩個邊界便可以有不同的邊界條件。如果我們假設矩陣 Z、Z 互相對易，因此可以同時對角化為只含 ± 1 的對角矩陣。所以每一個全域場便有兩個奇偶性（Parity），分別對應到 Z_2 及 Z'_2，不同奇偶性的場，它的 KK 展開也就留下不同的部分：

$$(+,+):\cos\left(\frac{2my}{R}\right) \qquad (+,-):\cos\left(\frac{(2m+1)y}{R}\right)$$

$$(-,+):\sin\left(\frac{(2m+1)y}{R}\right) \qquad (-,-):\sin\left(\frac{(2m+2)y}{R}\right) \tag{13}$$

在四種組合中，只有 $(+,+)$ 的場擁有質量為零的零態。而且，$(-,-)$ 與 $(+,-)$ 的場函數在固定點 O' 為零，所以具有此兩種組合的規範場，其規範對稱在 O' 便被破壞；同理，$(-,-)$ 與 $(-,+)$ 的場函數在固定點 O 為零，具有此兩種組合的規範場，其規範對稱在 O 也被破壞。只有 $(+,+)$ 的規範場，其規範對稱可以存活。

四、對稱破缺的例子

我們現在舉一個簡單但有趣的例子來說明上述的機制。這是一個將電弱規範對稱 $SU(2)_W \times U(1)$ 統一為 $SU(3)_W$ 的模型[5]。將左手系的輕子與右手系的輕子寫成一個三重態（Triplet）：$L \equiv \begin{pmatrix} e_L & \nu & e_R^c \end{pmatrix}$，並假設它們遵守一個 $SU(3)_W$ 的規範對稱，假設這一規範對稱存在於額外空間 $S_1/(Z_2 \times Z'_2)$，三重態 L 在 Z_2 及 Z'_2 下分別以矩陣 Z、Z' 變換：

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

在 Z'_2 變換下，$\begin{pmatrix} e_L & \nu \end{pmatrix}$ 是偶性場，e_R^c 是奇性場，所以 $SU(3)_W$ 被破壞為 $SU(2)_W \times U(1)$，讀者不難驗證 $SU(2)_W \times U(1)$ 規範場的奇偶性為 $(+,+)$，而其餘 $SU(3)_W$ 中的規範場為 $(+,-)$，所以存活的規範對稱就正好是標準模型中的電弱規範對稱。因為 $SU(2)_W$ 與 $U(1)$ 都是一個李代數 $SU(3)_W$ 的一部分，所以 $SU(2)_W$ 規範場與 $U(1)$ 規範場的耦合常數 g, g' 都可以由 $SU(3)_W$ 規範場的耦合常數 g_3 計算出來，所以 g 與 g' 的比例是可以預測的，而不是如標準模型中是一個自由參數。依據這樣的計算，$\sin^2\theta_W = 0.25$，與實驗結果的 $\sin^2\theta_W = 0.23$ 非常接近，其差距可以由重整化群的演化（Renormalization Group Running）來解釋，計算結果顯示 $1/R$ 大致是 1.0 TeV 左右。

在這樣的模型中夸克如何放入呢？事實上，依據夸克的量子數，我們是沒辦法將夸克寫成 $SU(3)_W$ 的多重態，這是為什麼此模型的四維時空版本在 1973 年被提出後，很快就被放棄的原因。不過，在五維時空中，夸克卻找到了出路，在額外空間裏，有些位置 $SU(3)_W$ 的對稱已經破缺為 $SU(2)_W \times U(1)$，那就是邊界 O'，Z'_2 的固定點。如果我們在此固定點放上一個三維膜（像 ADD 模型一樣），限制夸克只能在這個膜上，那麼就不必將夸克寫成 $SU(3)_W$ 的多重態。

這個 $SU(3)$ 電弱統一模型具有許多有趣的性質。輕子可以是全域場，也可以是 O 上的膜場，為了得到正確的輕子質量，希格斯場必須是 $SU(3)_W$ 變換下的 **6** 六重態。在此模型中，輕子的性質與標準理論非常不同，所以有可能建構有用的嶄新機制，我與合作者曾嘗試討論微中子物理，利用如同 Zee 模型的輻射修正，來產生極小的微中子質量[6]；我們發現如果再引入兩個 **3** 三重態希格斯場，這個機制可以得到現在實驗中所觀察到微中子質量與特別的混合形式。這個機制不需要引入如大統一理論的 $M_{GUT} \approx 10^{16}$ GeV 超高能量，因為質量來自輻射修正，再加上大體積抑制的

效應，就能產生極小的質量，這是此機制最不同於其他微中子質量模型的優點。

相似的方法，也可以被用來破缺大統一理論的 $SU(5)$ 規範對稱成為標準模型的 $SU(3)\times SU(2)_W\times U(1)$ [7]。考慮在 $SU(5)$ 的基本表現 **5** 中，$Z=I$, $Z'=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,1,1)$，對應於 $SU(3)\times SU(2)_W\times U(1)$的規範場奇偶性是 $(+,+)$，而其餘的規範場 X、Y 則是 $(+,-)$，所以在固定點 O' 上，$SU(5)$ 破缺成為 $SU(3)\times SU(2)_W\times U(1)$。在此模型中，希格斯場是一個基本表現 **5** 的全域場，由 Z、Z'可知，帶顏色的三重態奇偶性是 $(+,-)$，它的 KK 態質量至少為 $1/R$，而不帶顏色的二重態奇偶性是 $(+,+)$，所以有無質量的零態，這就成為破缺電弱對稱的希格斯粒子。在 $SU(5)$對稱的固定點 O 放置一個膜，標準模型中的物質可以被限制於此膜上，這些粒子仍然組合成 $SU(5)$的多重態 $10+\overline{5}$。如果假設 $1/R\approx M_{GUT}\approx 10^{16}\,\mathrm{GeV}$，在此能量以下粒子的內容便與一般的大統一理論相同，所以耦合常數的統一仍然可以達成。

此外這個方法還可以用來破壞超對稱（Supersymmetry）[8]，如果假設所有標準模型粒子以及它們的超伴侶（Super Partner）都是全域場，指定矩陣 Z'就是 R Parity，那麼所有的超伴侶就都是 Z'_2變換下的奇性場，所以它們的最輕 KK 態質量至少為 $1/R$；而標準模型粒子都是偶性場，則可以有無質量的零態。所以超對稱便被破缺。（有些細節在這裡無法詳述，五維時空中，超對稱是 $N=2$，所以粒子數量是四維超對稱的兩倍，所以這裡還必須先用 Z_2 Orbifold 來破缺 $N=2$ 為 $N=1$）。

以上的對稱破壞機制，對於李代數在破缺之後留存那些部分其實是有很大限制的。如果矩陣 Z、Z'是對稱群 $SU(N)$的一員，那麼在離散對稱下轉換李代數的 Automorphism 就是一個 Inner Automorphism。可以證明在此條件下，李代數的對稱破缺是保持 Rank 總和不變的[9]。例如，$SU(5)\rightarrow SU(3)\times SU(2)_W\times U(1)$，兩邊的 Rank 總和都是 4（4 與 2+1+1）。電弱統一的 $SU(3)_W\rightarrow SU(2)_W\times U(1)$，兩邊的 Rank 總和都是 2（2 與 1+1）。也因此如果要利用 Orbifold 的機制來取代希格斯機制，把電弱對稱 $SU(2)_W\times U(1)$破壞為 $U(1)_{EM}$（Rank 減 1），就得多花一點功夫。

在 Orbifold Projection 的機制下所建構的邊界條件，如上所述是限制很大的。那麼是不是能直接從線段出發，而不要經過圓與 Orbifolding 的手續，找出比較寬鬆的邊界條件？我們可以要求邊界條件的設定必須使由作用量經由變分（Variation）原則所得出的運動方程式必須是預期的相對論不變形式。如此所得出的邊界條件對任意場可以是 Neumann 或 Dirichlet 條件的任擇其一，而不需要由 Orbifolding 對稱 Z 來決定[10]。當然如此寬鬆的邊界條件，尤其對規範場來說，就必須小心檢查所定義出來的理論是否一致（Consistent），例如 Unitarity 等條件是否滿足。

利用這種想法，最近物理學家開始建議一個不需要希格斯場的電弱對稱破缺理論（Higgsless Electroweak Symmetry Breaking）[10][11]，雖然原則上可以做到破缺，但是要得到一個可行的模型，並不是那麼容易。最簡單的模型所預測的 $W^{\pm}$、Z 粒子質量竟是相等的；如果把電弱對稱擴大為 $SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_{B\text{-}L}$[10]，情況可以得到改善，然而所得到的 $W^{\pm}$、Z 粒子質量卻太輕了，而且兩者的比例與實驗結果有10%左右差距；最近的解決方案，是將 $SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_{B\text{-}L}$ 規範對稱建構於五維的 Randall-Sundrum 模型、也就是一個 anti-de Sitter 空間之中[11]。初步計算顯示，似乎此模型仍需要仔細調整參數，才能符合電弱精密測量結果，所以這樣的方案是否可行，仍有爭議。

五、結論

對稱破缺可以說是近代粒子物理最神秘的謎題之一，傳統上以純量場來達成自發對稱破缺，然而經過這麼多年的尋找，希格斯粒子仍未能被發現，所以，如能有替代方案應該是非常有趣的。本文介紹了在額外維度模型中，利用邊界條件來破缺對稱的機制。它與希格斯機制在現象上有很多類似之處，都是在粒子

質量樣式上顯出對稱破缺，而在高能現象仍保留對稱性質。在許多應用上，此機制可以取代希格斯機制，然而真實模型建構的工作，才剛剛開始。

參考資料：

[1] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 43 209,1993; S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields V II, Cambrige, 1996.

[2] S. Coleman, Aspects of Symmetry, Sec. 4, Cambridge, 1985.

[3] Csaba Csaki, hep-ph/0404096 提供了有關額外維度各相關課題的介紹。

[4] N. Arkani-Hamed, S. Dimoposlos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B 436, 257 (1998).

[5] L.J. Hall and Y. Nomura, Phys. Lett. B 532, 111 (2002); S. Dimopoulos and D. E. Kaplan, Phys. Lett. B 531, 127 (2002).

[6] C.-H. V. Chang, W.-F. Chang and J.N. Ng, Phys. Lett. B 558, 92 (2003).

[7] Y. Kawamura, Prog. Theor. Phys. 105, 999 (2001); L.J. Hall and Y. Nomura, Phys. Rev. D 64, 055003 (2001). .

[8] R. Barbieri, L.J. Hall and Y. Nomura, Phys. Rev. D 63, 105007 (2001)

[9] A. Hebecker and J. March-Russell, Nucl. Phys. B 625, 128 (2002).

[10] C. Csaki, C. Grojean, H. Murayama, L. Pilo and J. Terning, Phys. Rev. D 69, 055006 (2004).

[11] C. Csaki, C. Grojean, L. Pilo and J. Terning, Phys. Rev. Lett. 92, 101802 (2004).

作者簡介

張嘉泓

美國哈佛大學博士，主要研究興趣為基本粒子物理與場論，現任國立台灣師範大學物理系副教授

mailto:chchang@phy.ntnu.edu.tw

雙 月 刊 稿 約

一 、雙月刊歡迎學界同仁來稿，為文介紹物理學最新發展領域或個人研究成果。

二 、本刊內容深度以大學理工相關科系之學生能理解為原則。

三 、來稿請註明作者姓名、服務機構及電子郵件信箱，以便聯絡。

四、來稿請以 word 檔案處理，圖檔請以解析度 400 dpi 以上之 jpg 檔製作，以電子檔傳送編輯部。

五、體例規範請參考網頁：http://psroc.phys.ntu.edu.tw/bimonth/author.pdf

六、來稿一經刊登，酌致稿酬。

七、來稿需為自行創作，如引用資料或直接複製圖表，請自行取得著作所有權人之同意。來稿若為譯稿，除譯者外應註明原作者姓名及出處。

八、一經投稿，即視同授權本刊刊載（含網路版）。