

# 中美掩星觀測計畫(TAOS)與 古柏帶相關研究近況

文/金升光

## 古柏帶(Kuiper Belt)研究的相關發展

過去十多年間，天文學家們在海王星以外的太陽系探索以及環繞著其他恆星的行星系研究上都有顯著的成果。截至今年(2004)夏天為止，在太陽系外圍已經發現了近一千個新的小天體，包括約八百顆掠海王星族的小天體 (trans-Neptunian objects, 簡稱 TNO) 和一百多顆具有長橢圓形軌道的半人馬族或散射族小天體 (Centaurs 或 scattered disk objects, 簡稱 SDO)。其中十二顆甚至證實有衛星的存在，或者說是類似冥王星與凱倫 (Charon, 冥衛一) 的雙行星系統[1]。在這近一千個太陽系的新成員中，最大最遠的賽德娜 (Sedna, 2003VB<sub>12</sub>)[2]直徑估計可能接近 1800 公里，大約是冥王星的四分之三。絕大部分的古柏帶天體 (Kuiper Belt objects, TNO 或 SDO) 都是在 50AU 的距離內發現的，有些天文學家認為 50AU 或許就是古柏帶的邊界[3]。然而，賽德娜最接近太陽的時候也有 76AU，可能已經不能算是古柏帶的一員，而是逐漸接近歐特雲 (Oort cloud) 的領域了。賽德娜的軌道半長軸約有 500AU，卻在接近太陽的位置被發現，再加上觀測天區大小的修正，很可能有上百個類似的天體在太陽系的外圍還沒有被我們注意到或是超出了天文學家們現有的觀測能力範圍。

目前觀測到的小天體數目和亮度大致符合某種指數律的分布。假設亮度只和它們的大小成比例，我們可以說她們的數目與大小的關係也滿足相似的指數律。這個關係式可以簡單表示成  $N(R) dR \propto R^{-q} dR$ ，其中  $R$  是天體半徑， $N(R)dR$  是半徑在  $R$  和  $R+dR$  之間的小天體總數。不過，有時候天文學家們會使用累進的 (cumulative) 關係式而不是微分的關係式，例如小於某

個星等的天體總數或大於某個半徑的天體總數等等，使用時應稍加留意。早先地面望遠鏡大規模(皆小於 73 平方度)巡天觀測的結果大致上符合  $q=4$  的單一指數律[4]。最近太空望遠鏡的觀測結果( $m \leq 29.2$  等，觀測天區大小 0.02 平方度)[5]和數值模擬小天體碰撞演化的研究[6]則傾向於較複雜的雙指數律分布。他們認為較小的天體可能符合不同(較小的)  $q$  值。也就是說，較小天體的數目或許沒有以前想像的那麼多。而這轉折的地方可能就在於半徑約一公里到數十公里的小行星或小彗星。但是，它們的數目也不能太少，否則可能很難解釋木星族(短週期)彗星的起源。目前的估計是古柏帶約需要  $10^9 \sim 10^{10}$  個 1 至 10 公里大小左右的彗星前身，才足夠補充消耗掉的木星族彗星[5,7]。

雖然過去幾年有這麼多的研究進展和新發現，天文學家們對於古柏帶與短週期彗星起源乃至於太陽系外圍結構和演化歷史的疑問卻並沒有減少。為了解釋海王星外突然消失的質量和短週期彗星起源而導致古柏帶的發現。然而，古柏帶最近的觀測結果卻仍然不能完全釐清這些問題的癥結。有一種可能是在太陽系形成的初期發生了一些特別的事件而塑造了太陽系今日的面貌。或許，在太陽系內進一步的觀測與搜尋可以透露出一些蛛絲馬跡。另一方面，我們也可以和其他的太陽系來比較，了解一個典型的行星系統『應該』是什麼樣子，恆星與行星系統究竟是如何形成的。利用都普勒效應或星蝕乃至於微重力透鏡等方法已經發現了一百多個太陽系外的行星，絕大部分是類似木星的巨大行星。它們的軌道元素分布和我們所熟悉的太陽系確實有相當的差距[8]。同時，天文學家也觀測到在我們太陽附近鄰近的幾個和太陽相類似的恆星也可能有類似古柏帶的結構存在[9]，由於它們的溫度低(約

30K~60K), 質量小, 需要較高的靈敏度, 可能要等到下一代次毫米波望遠鏡陣列(例如 ALMA)完成後才有機會進行大規模的研究。

利用掩星方法直接偵測古柏帶甚至古柏帶以外典型彗星大小天體的實驗, 例如 TAOS 計畫, 也因此扮演著一個重要的角色。關於彗星掩星觀測計畫的原理及現況請參閱溫志懿博士先前在本刊的文章[10]、參考文獻[11]和我們的網站[12]。本文將概略介紹相關的關鍵技術發展近況並簡介我們最近的研究成果。

## TAOS 系統特性

中美掩星觀測計畫是中央研究院的主題計畫之一, TAOS 則是計畫正式的英文簡稱。計畫由國內外數個研究單位及個人共同合作, 部分也由國科會資助。除了原先由中央研究院、中央大學和美國勞倫斯利物摩國家實驗室提供的三組望遠鏡, 韓國延世大學也提供了第四組同型的望遠鏡和 CCD 相機。由多座望遠鏡同步運作並觀測同一天區可以有效的消除地面觀測常見的假訊號(false alarm), 例如由蝙蝠、飛鳥、視相不佳等因素所造成的星光閃爍。為了用較經濟的成本在約每秒五次的高頻率下同時觀測上千顆目標星, TAOS 採用 CCD 相機而沒有使用光電管或光纖系統。新型的 SI-800 背照式 CCD 相機有四百萬個畫素、每畫素兩位元組的灰階(dynamical range)、雙輸出和更高的量子效率, 以提高可用的目標星數目。目前, TAOS 在每個天區可用的目標星總數在五百到一千顆左右, 視積分時間、信噪比要求、測光方法、天空背景和目標星場的擁擠程度而定。我們可以概略估計一下每晚每組望遠鏡系統的資料量。TAOS 原始資料一般是以數十排 CCD 影像為單位, 暫稱為排區塊(row block, 參閱下文關於拉鍊式取像法的介紹)。每個排區塊的大小約為  $64 \times 2048$  個畫素。每 0.2 秒送出一個排區塊相當於每秒送出 1.28 MBytes 的資料。假設每晚有六小時的實際曝光(不包括轉動望遠鏡搜尋目標及對焦等), 每組望遠鏡每晚將產生約 28 GBytes 的原始資料。如果只儲存經過處理的測光結果而非整組原

始影像會不會大幅減低我們對硬體(例如硬碟、光碟或磁帶)的需求呢? 每筆測光結果應該包含目標星的名稱或編號(約 5~10 bytes)、時間(約 10~15 bytes)、光度(約 5 bytes)和其他相關資訊。假設每顆星每 0.2 秒需要約 40~80 bytes, 一千顆星每秒鐘就產生約 200~400 KBytes 的資料, 和儲存原始影像相比其實相去不遠。假如每 0.2 秒測光一次, 每天觀測六至八小時, 每次同時觀測一千顆目標星, 全年觀測 100 至 200 天, 每組望遠鏡每年將累計進行  $10^{10}$  至  $10^{11}$  次左右的觀測及測光。我們希望三、四組望遠鏡的同步觀測結果經過交叉比對分析之後, 因統計上的偶發事件或假訊號而誤判的機率能夠降到  $10^{-11}$  或  $10^{-12}$  以下。TAOS 的控制軟體是以美國的 ROTSE (Robotic Optical Transient Search Experiment) 計畫控制軟體為基礎, 再適度修改發展成適合本計畫多組望遠鏡同步自動觀測並即時分析的軟體, 例如工作規劃排程、自動對焦、CCD 特殊操控、光度測定和相關度分析統計、資料流程與儲存等等都是 TAOS 特有的部分。全部程式架構在 LINUX 這樣的分時系統下, 但是要達到即時(real-time)系統處理的目標而不使用商用的即時作業系統自然有其難度。譬如, 要如何才能準確的控制每次曝光的時間(約 200~300 毫秒)到 10 毫秒以下, 就沒有一個簡單直接的答案, 需要花額外的工夫來處理這類問題。

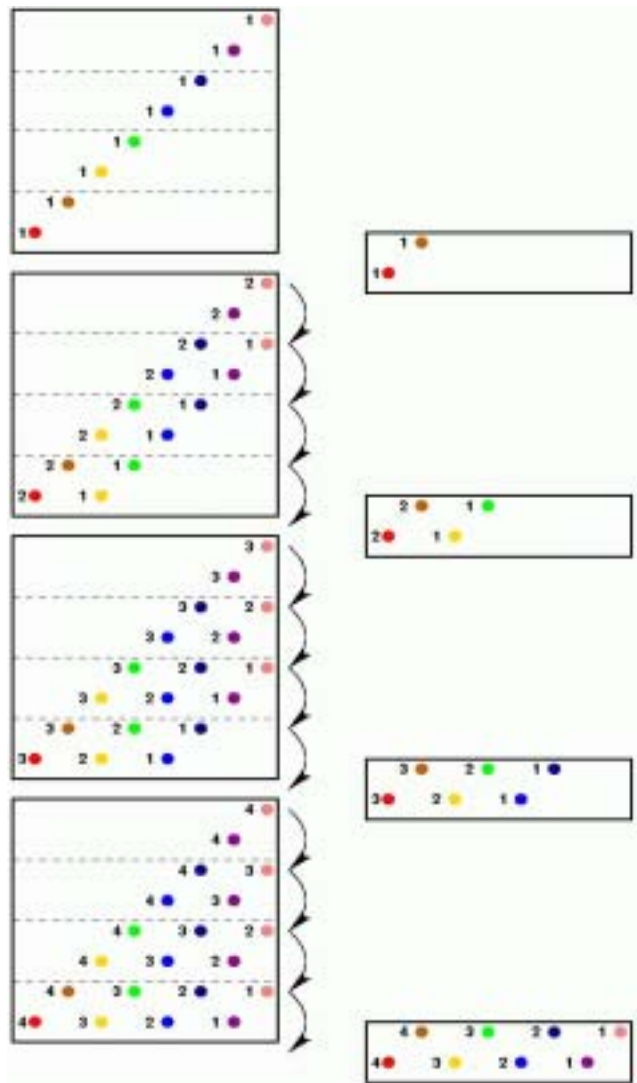
## 拉鍊式取像法(shutterless zipper mode operation)

一般用 CCD 相機觀測掩星的方法是採用固定攝影, 如溫文中所介紹。這種方法的缺點是當視相稍差時, 掩星發生前後的星光會干擾掩星的信號。而且觀測的星場會隨地球自轉而偏移, 目標星密度與重疊情形較難掌握、快門開關頻繁、如果要觀測指定的目標星場也必須時常調整望遠鏡。TAOS 計畫現在採用的辦法稱作『拉鍊式取像法』(zipper mode operation), 是借用傳統的 CCD 運作原理配合一些軟體程式的控制來達成快速測光的目標。傳統的 CCD 運作是在曝光結束後將晶片上產生的光電子一排接一排的循序讀出並作放大和類比數位轉換的動作。以我們目前使用的 SI-800 型相機為例, 一整排光電子往下移動一行需

要的時間大約是一毫秒。將全部 2048×2048 個畫素的光電子讀出大約需要幾秒鐘的時間。為了加快資料讀出的速度，這一型的相機有兩組的輸出頻道。即便如此，也無法達到 TAOS 每 0.2 秒曝光一次的要求。解決的方法是，在每一次曝光之後(不關閉快門)，光電子一排接一排循序輸出時，只輸出例如 64 排的影像(而不是原先的 2048 排四百萬畫素的資料)，然後暫停輸出約 0.2 秒，進行下一次的曝光，接著重複讀出 64 排和暫停並曝光的動作，在若干(例如 32)個週期之後輸出的結果會到達一種穩定態。(圖一概略顯示了這樣的動作，不過將 32 個週期簡化成四個週期。)每次輸出的 64 排影像構成一個排區塊(row block)，我們可以集合許多個排區塊寫成一個或數個檔案儲存或直接把牠送進資料分析管路。不過，讀出 64 排也需要時間，所以實際上星點的曝光時間會短一些。而且一排一排循序讀出時因為快門全開，相機仍會繼續接收星光，星場裡面較亮的星星就會在兩次曝光之間留下一條明顯的軌跡。由拉鍊式取像法得到的資料還有一些其他的特性。如圖一所示，目標星場內八顆不同的星星全部被壓縮在一個排區塊內，而且不同週期內曝光的星點也會混合在一起(圖一中以數字表示不同週期的曝光)。實際觀測上，目標星可能有上千個，多達 32 個不同週期的曝光星點全部集中在一個區塊內。原先相距很遠的兩顆星，經過『壓縮』後可能會靠得很近。如果沒有原始未壓縮的影像，是不可能辨認出某顆星原先是在那個位置的。這種做法的好處是，望遠鏡仍如往常一樣追蹤目標的星場，快門打開開始曝光後原則上不需要關閉，我們也可以用傳統的測光方法例如孔徑測光(aperture photometry)或點瀾散函數(point spread function)等方法來分析光度資料。最近也有其他的團隊開發出類似的方法並成功的應用在月掩星[13]及雙星系統的光斑影像(speckle imaging)觀測上[14]。對於日益普及的 CCD 天文觀測而言，這是一個能夠將系統的時間鑑別率擴展到幾分之一秒以下的選擇。

用拉鍊式取像法曝光每個畫素上的星點信噪比可以用下面的公式來計算[15]

$$\frac{S}{N} = \frac{gN_*T_{hold}}{\sqrt{gN_*T_{hold} + gN_{sky}T_{sky} + N_{dark} + n_{readout}^2}}$$



圖一 無快門拉鍊式取像法示意。(由上而下)假設視野中原有八顆星沿著對角線方向排列，經過四個週期的拉鍊式取像，每次讀出一個排區塊而達到穩定態的輸出。全視野內不同週期曝光的結果(阿拉伯數字表示)全部被壓縮在同一個排區塊內。

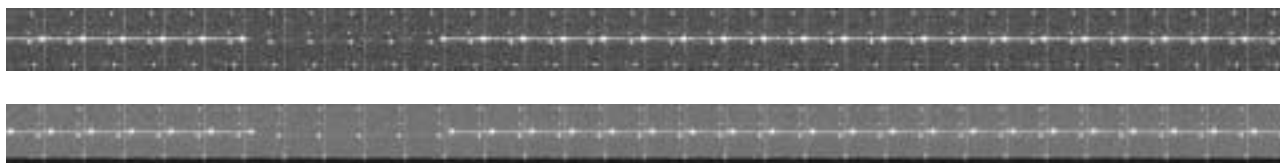
上式中， $S/N$  是信噪比， $g$  是 CCD 系統的增益， $N_*$  是來自入射星光的亮度， $T_{hold}$  是實際上暫停讀出和星點曝光的時間， $N_{sky}$  是天空背景光的亮度， $N_{dark}$  是因熱雜訊產生的電荷(dark count)， $n_{readout}$  是電子傳輸非理想時產生的雜訊， $T_{sky}$  是每個畫素(pixel)看到天空背景光的累計時間， $T_{sky} = N_{row} T_{row} + (N_{row}/N_{skip}) T_{hold}$ ， $T_{row}$  大約是 1 毫秒， $N_{row} = 2048$ ， $N_{skip} = 64$  左右，由拉鍊式取像時的設定值決定。上式也可以稍加修改以計算某顆星的信噪比，只要把孔徑內所有的畫素相加即可。

在 TAOS 系統中，一個畫素約相當於 3 角秒 $\times$  3 角秒 (arcsec)。如果星光能夠集中在少數幾個畫素內，信噪比就會比較高，這是由望遠鏡的光學系統來決定。其實上面的式子和一般 CCD 觀測所用的式子大同小異。但是在拉鍊式取像時天空背景的曝光時間  $T_{sky}$  和星光在每個週期的曝光時間  $T_{hold}$  並不相同，而且還會隨著壓縮比( $N_{row}/N_{skip}$ )的增加而放大。假設原先天空背景的亮度是 20 等/平方角秒，TAOS 每個畫素上的天空背景應該是它的九倍，經過拉鍊式取像後，天空背景相對於星光又累積了三、四十倍(不過，噪訊的累積還要再開根號)。由於 TAOS 搜尋的目標只發生在短短的一兩次曝光之間，利用長時間積分來提高信噪比在此並不太適用。這樣的特性使得拉鍊式取像中可用

的目標星數目受到很大的限制，比起一般單次曝光要少很多，也會影響到我們可能偵測到的掩星事件數目。這問題有幾種可能的解決辦法，前面提到改善望遠鏡的光學品質是其中之一。另外，採用不同的 CCD 技術加快系統讀出的速度(譬如利用 frame transfer CCD 或多頻道輸出)，甚至於改採用 CMOS 而非 CCD 來直接讀出目標星所在的畫素資料(和使用光纖系統類似) 或另外在 CCD 晶片上加遮光罩直接擋掉天空背景只露出目標星所在的部分，都可能增加可用的目標星總數，提高成功偵測掩星的機率，或甚至縮短曝光的時間，偵測到更小更遠的天體，是 TAOS 未來可行的改進方向。



圖二 利用拉鍊式取像法觀測到的第 51 號小行星 Nemausa 掩星影像，每點曝光時間約 0.5 秒，2004 年 2 月 21 日，台北時間 22 日凌晨，溫志懿遙控 TAOS B 望遠鏡拍攝



圖三 利用拉鍊式取像法觀測到的第 1723 號小行星 Klemola 掩星影像，每點曝光時間約 0.25 秒，2004 年 6 月 5 日，溫志懿遙控 TAOS A(上)及 TAOS B(下)望遠鏡拍攝

圖二和圖三都是利用拉鍊式取像技術拍攝到的小行星掩星事件。小行星掩星的預報資料由日本佐藤勳博士(Dr. Sato Isao)和中央大學的木下大輔博士提供。圖二是今年 2 月 21 日(台北時間 22 日)第 51 號小行星 Nemausa 掩星的過程。目標星 HIP 079407 是一顆 8.8 等左右的亮星，全部掩星過程約 5.5 秒鐘。圖中每次曝光的時間是 0.5 秒，小行星本身亮度 11.9 等，直徑約 150 公里。這次事件從台北到台南共有六、七組人馬同時進行觀測，僅有中央大學鹿林前山天文台的一米望遠鏡和 TAOS 望遠鏡記錄到掩星，小行星的影子顯然並未通過台師大與成大天文台的上空[16]。雖然這類的天文事件可遇而不可求，但是如果中部地區甚至於全台各地學校或業餘的望遠鏡都踴躍的參與觀測

並相互切磋，構成綿密的觀測網，必能產生更具科學價值的觀測結果。圖三則是今年 6 月 5 日第 1723 號小行星 Klemola 掩星的過程。目標星也是一顆 8.5 等左右的亮星 HIP 050535。不過，圖中每次曝光時間是 0.25 秒，全部的掩星過程只有約一秒鐘左右，同時被兩架 TAOS 望遠鏡記錄下來，在拉鍊式的影像中看得非常清楚。小行星本身的亮度約 15.7 等，直徑約 31 公里。此外值得一提的是，這兩次的觀測都是透過網路從台北遠距遙控鹿林前山的 TAOS 望遠鏡和電腦所完成的，山上當地的助理只需協助一些開關和監測的安全動作。這兩次測試顯示 TAOS 已經接近多台望遠鏡全自動化同步運轉的目標了。

## 一、誤報率與測光排序統計

圖二與圖三顯示預報的小行星掩星事件透過拉鍊式取像可以非常的清楚顯示出來，但是當目標星是 12 等或 13 等的暗星而且只有一次曝光有被遮掩的跡象時，我們究竟還有多確定這就是我們尋找的未知掩星事件呢？利用地面的望遠鏡觀測 0.2 秒左右的掩星，要如何才能使誤報率降到 $10^{-11}$ 或 $10^{-12}$ 以下？從我們一開始提到的大小分布指數律來看，越小的古柏帶天體數目越多，計算出來的掩星的機率也越大，所以，這個問題就十分重要。TAOS 的想法是，如果單一望遠鏡的誤報率低於 $10^{-3}$ 或 $10^{-4}$ ，假設各組望遠鏡彼此互不相關，我們就可以把誤報率降到可接受的範圍。會發生誤報的原因有很多種可能，例如前面提到的飛行物、大氣因素等等。即使沒有這些外力的干擾或者已經利用多組望遠鏡同時觀測來剔除這些特殊的事件，單純的光子計數在統計學上的起伏也有造成誤報的可能。除去一些不可抗力的因素，要怎樣來設計一種演算法以即時或近乎即時的速度來偵測可能的掩星事件，使其他大望遠鏡能在短時間內追蹤或驗證我們小望遠鏡的發現？TAOS 團隊在統計學家協助下提出了一個理論上簡單可行的辦法[17]。首先，由拉鍊式取像法得出的資料必須經過光度測定分析 (photometry)，利用上文提到的孔徑測光或點瀾散函數法來決定星點的亮度。對於同組望遠鏡的近千顆目標星先取得  $N$  次(例如， $N=10^3$  或  $10^4$ )的觀測數據，這應該只需要幾分鐘到幾十分鐘的時間。接著我們計算同望遠鏡同一顆星這  $N$  次測定光度的中間值(median, 50%處的光度值)和四分位距(interquartile range, 即 75%處和 25%處的光度差)，使用中間值和四分位距(而不是平均值和標準差)可以減低一些特別亮或特別暗的異常數據點所造成的影響。這  $N$  次測光結果可以當作某架望遠鏡某顆星的樣本資料。然後，我們進行第  $N+1$  次的曝光及測光，測光結果要標準化，亦即減去方才求得的中間值再除上四分位距使亮星暗星或不同組望遠鏡和 CCD 相機的結果相類似，假設結果是

$F_{N+1}$ 。這個結果可以和同組望遠鏡同一顆星的樣本比較並排序。假使樣本  $F_{(1)} < F_{(2)} < \dots < F_{(m)} < \dots < F_{(N)}$ ， $F_{N+1}$  小於  $F_{(m)}$  的機率就是  $m/(N+1)$ 。如果三組或四組望遠鏡同一顆星的結果都滿足  $F_{k(N+1)} < F_{k(m)}$  ( $k$  表示第  $k$  組望遠鏡)，那麼，只要選取適當的整數  $m$  使得  $m/(N+1) < 10^{-3}$  或  $10^{-4}$  就可以把誤報率降到我們要求的標準。這樣的做法是基於以下的假設。第一，雜訊在不同組望遠鏡間是彼此不相關的。如果望遠鏡相距很遠，這假設應該會成立。不過，例如 TAOS A、B 兩組望遠鏡相距僅六公尺，它們之間的相關性顯然應該由實驗來驗證。第二，每次(約 0.2 秒)曝光的雜訊和其他次曝光的雜訊是獨立的。對於光子統計或 CCD 電子雜訊來說應該沒問題，但是，大氣擾動的變化恐怕就不是這樣了。假如視相有所變化，我們需要重新取得樣本再進行光度測定的比較。至於下一次取樣的時機可能還是得透過實際觀測數據分析來決定。第三，假使沒有發生掩星，標準化的光度測定值  $F_N$  它的機率分布和那一顆星或那一次曝光無關。這也是標準化的目的之一。例如，某星光度測定值呈高斯分布，其他星的測定值的平均值和標準差也會和它一樣。只是，這些假設都是理想狀況。實際上，大氣和天候隨時可能有所改變，同一望遠鏡同樣視野內的星光可能有所差異，星球本身也可能有光度的變化。當兩三組 TAOS 望遠鏡同步運轉時，就能夠實地測試及應用這些概念。而多組望遠鏡同步觀測同樣目標正是這個計畫的特性之一。類似的想法也可以應用在反推實際發生掩星的比例上。如果沒有發生掩星，所有(譬如， $10^{10}$  次)測光結果的  $P$  值( $P$ -value, 例如，某次測光的  $P$  值 =  $m/(N+1)$ ) 分布應該是均勻的。藉由控制假訊號(false alarm)的檢出率(False Discovery Rate)和計算  $P$  值的排序，我們可以在事後估計掩星實際發生的數字[17]。

## 二、彗星大小形狀與掩星時間的分布

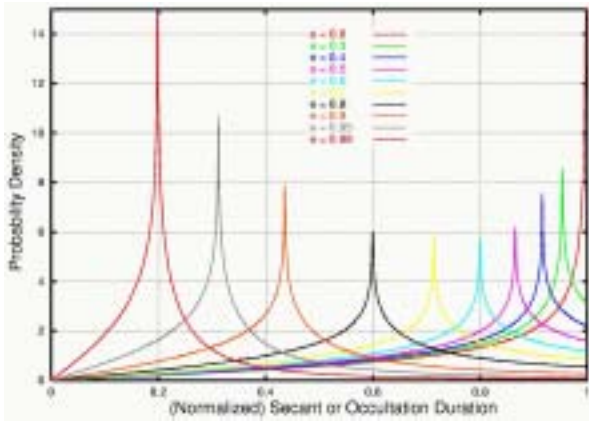
和一般小行星掩星觀測不同，TAOS 基本上是一個統計的實驗，也是沒有其他辦法的辦法。我們無從得知那一顆背景恆星會被看不見的小行星或小彗星遮掩，只能依靠增加樣本的數目來提高偵測成功的機

率。單一望遠鏡觀測某次獨立的掩星事件並不能準確辨別出關於掩星母體大小和形狀的物理特性，比較不具科學價值。因此，傳統的掩星觀測(多半由機動性高的業餘望遠鏡來執行)講求廣泛的涵蓋區域和精準的校時。受到地形和資源的限制，TAOS 各望遠鏡之間的基線目前沒有辦法拉長到幾公里遠(和我們搜尋目標的小彗星典型尺寸相當)，最遠也不到一百公尺。基本上，這就相當於單一望遠鏡的觀測，很難求出天體的大小或形狀。然而，假如 TAOS 或其他類似的掩星計畫成功的觀測到了相當多次的掩星事件，除了它們的數目和分布之外，難道就沒有其他的資訊在裡面嗎？我們可以先考慮一些簡單的情形。首先，假設掩星的光度變化完全是一個幾何學的關係，而且所有的目標星都是點光源，沒有大小。於是，所有掩星的光度變化曲線都變成了類似方波(或方井)的形狀，井的寬度就是掩星發生的時間。如果所有的掩星天體都有相同的大小、距離(相對速度)、形狀，掩星發生的時間也就正比於目標星所切過的弦長，所有不同弦長發生的機率或許就可以決定它們共同的外型。例如，一組同樣大小的圓(球)形小行星被隨機分布的目標星切過的弦長應該滿足  $p(x) = x/(1-x^2)^{1/2}$  的機率分布(請讀者自行證明)，其中  $x$  是弦長和直徑的比， $0 \leq x \leq 1$ 。當  $x$  趨近於 1 時，機率密度也趨近於無限大。也就是說，對於這種圓(球)形小行星掩星弦長接近直徑的機會會比較大。這只和它們共同的形狀有關，和大小無關。我們可以很容易的進一步推廣考慮截面是橢圓形的小行星。不過，由於前提是只要求大小、相對速度和截面形狀相同，計算時必須將(相對於掩星發生方向)不同旋轉角度的橢圓加起來再平均。每個角度發生的機會是相同的。但是，掩星發生機率正比於小行星在垂直於掩星發生方向(即目標星的相對移動方向)的大小，因此，不同旋轉角度的橢圓會有不同的統計權重(weight)。假設  $y$  是弦長與橢圓長軸的比， $0 \leq y \leq 1$ 。當  $y < (1-e^2)^{1/2}$  時( $e$  是橢圓的離心率)， $y$  的機率分布  $p(y)$  可以寫成

$$p(y) = \frac{y \int_0^{\theta_f} \frac{(1-e^2 \cos^2 \theta)^{3/2} d\theta}{\sqrt{(1-\frac{y^2}{1-e^2}) + \frac{y^2 e^2}{1-e^2} \cos^2 \theta}}}{\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta} d\theta},$$

$$\theta_f = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leq y \leq \sqrt{1-e^2} \\ \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} \sqrt{1-\frac{1-e^2}{y^2}} \right) & \sqrt{1-e^2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$\theta$  是旋轉角，因為有對稱性所以只需要在 0 度和 90 度之間作平均。上式中的分母是一個橢圓積分(complete elliptic integral of the second kind)，記作  $E(e^2)$ ， $1 \leq E(e^2) \leq \pi/2$ 。在  $(1-e^2)^{1/2} < y \leq 1$  時要注意上式分子中積分項的定義域。對於一個給定的  $y$  值， $\theta \leq \theta_f$ ；對於一個給定的旋轉角  $\theta$ ， $y \leq [(1-e^2)/(1-e^2 \cos^2 \theta)]^{1/2}$ 。當離心率  $e$  等於零時，上式和先前圓(球)形的結果相同。 $p(y)$  的最大值發生在  $y = (1-e^2)^{1/2}$ ，也就是當弦長等於短軸長時機率密度最大。上式沒有解析解，不過很容易用簡單的程式來模擬。圖四就是各種不同離心率(由右至左  $e = 0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$ ) 的模擬結果。當共同外型由圓而扁時，短軸長軸比也逐漸變小。最大值事實上應該趨近於無限大，增加模擬的次數應該可以看得出來。當  $y = 1$  時的機率密度  $p(y = 1) = \pi(1-e^2)/(2eE(e^2))$ 。我們也可以計算或模擬截面為長方形的割線長度分布，結果是在長寬兩處都會出現無限大的機率密度。如果計算累進的機率分布，無限大就可以被一次微分不連續的轉折點取代。無論如何，至少在二維的例子裡面，不同的形狀經過旋轉平均後有完全不同的割線長度(弦長)機率分布。然而，這樣的鑑別率可能僅止於數學上的趣味，在實際應用上恐怕並不適合古柏帶天體的研究，除非能知道它們的大小遠近和相對速度。倒是小行星帶的小行星或許可以透過這類的辦法得出一些統計性的結果。目前比較可靠的辦法還是從光變曲線的研究並假設古柏帶天體表面有一致的反照率來估計它們的形狀[18]。



圖四 不同離心率的橢圓形小行星掩星弦長(正比於掩星時間)機率分布。這是數值模擬一百萬次的結果。

### 三、古柏帶掩星與菲涅耳繞射

幾何學上的關係或是方波方井的描述並不能完全取代掩星背後的物理。更真實的情況是遙遠星光經過古柏帶小行星或小彗星產生繞射[19]；目標星不是一個點光源而比較接近一個圓盤，中心部份比較亮邊緣部份比較暗(limb darkening)；此外，它們也不是理想的單色光源而是比較類似黑體輻射的光源。地球上的偵測器(例如我們的 CCD 相機)訊號也不是直接反映出望遠鏡所接收到的光影變化，它需要一定的曝光(積分)時間。繞射一般分夫朗和斐繞射(Fraunhofer)和菲涅耳繞射(Fresnel)兩種。前者的效應比較單純可以看成是一種傅立葉轉換，後者則比較複雜。假設彗星大小  $R$ ，距離地球  $d \cong 50$  AU，觀測波長  $\lambda \cong 500$  nm。當  $R \cong 1.9$  公里時， $(R^2 / \lambda d)$ 差不多等於 1，也就是說這時應該用菲涅耳繞射來計算，而數公里大小的古柏帶小天體正是 TAOS 計畫的觀測目標！顯然，在古柏帶彗星掩星的實驗中，菲涅耳繞射的效應不可忽略。星球的大小則可以從一般天文物理學的模型和觀測來推估。視星等 13 等左右，光譜類型 A0 和 K5 主序星的視半徑在 50 AU 遠處的投影大小約為 0.14 和 0.9 公里；如果視星等更亮或是巨星，它們的投影大小會更大。這些數字也大致和我們目標的小彗星相當，所有的效應必須一併考慮。最近幾年，我們建立了繞射計算的程式碼，

包含了上述大部分天文物理的相關細節以及一些 TAOS 的系統特性例如拉鍊式取像和濾鏡等等。透過這個比簡單幾何模型更精確的物理掩星模型，我們可以模擬更真實的掩星觀測信號，用它來檢驗測試系統參數或協助驗證將來的實驗結果。舉例來說，拉鍊式曝光取樣的時間究竟應該用 0.2 秒、0.3 秒還是其他的設定？理想情況下，比較短的曝光取樣時間可以比較準確的看到掩星發生的時刻甚至於重現整個掩星繞射過程。可是，縮短曝光取樣時間意味著相對來說會有更大的散粒雜訊(shot noise)，進而降低掩星訊號的信噪比，尤其是當目標星的星光微弱時問題最嚴重。可以想見，對於一組給定的望遠鏡、目標星和掩星天體，曝光時間不能太長也不能太短。一個數量級的估計是，它應該和彗星的大小相當，在信噪比容許的範圍內可以有些許的變化。事實上，這樣的敘述在某些假設加上例如方井模型的簡化之下是可以嚴格證明的，求出的最佳曝光時間大約相當於彗星大小的一半。我們也可以利用繞射模擬進行類似的計算，結果小有差異，或許是因為掩星光變曲線的不同所致。不過，如果要回答曝光時間如何設定的問題應該要考慮另外兩個重要的因素。第一，增加曝光時間可以增加同一視野內目標星的數目，提高成功偵測的機率，但是如先前所述，會比較難偵測到較小的彗星。第二，由古柏帶天體的大小分布來看，縮短曝光時間就有機會看到更小更多的彗星，相對也提高成功偵測的機率。問題的最後答案可能要靠分析觀測數據和理論的電腦模擬齊頭並進才能求出，因為彗星實際上的分布沒有人知道，而那正是整個計畫想要回答的問題之一。在實務上，恐怕必須要在觀測時嘗試不同的參數再進行分析和比對。最近，有其他的個人或團隊提出或進行利用單一望遠鏡在人造衛星或地面上以更快速的光度測定觀測掩星繞射的光變曲線[20,21]。從繞射的觀點來看，繞射產生的光度變化範圍總是大於這個小行星或小彗星的幾何陰影。繞射提高了這些小天體掩星被偵測到的機會，在某些情形下它們甚至於不需要真的『擋住』背景的目標星，只要靠近一點就可以了。當然，前提是要能夠在看似雜訊的觀測數據中檢出真正的繞

射圖樣。如果可行，我們甚至可能可以觀測到遠在歐特雲的彗星。掩星觀測對距離不敏感，從反面來說就是掩星觀測恐怕很難決定小行星或小彗星的距離。從純量繞射理論簡化的公式來看[22]，一個兩倍大的小天體在四倍遠的距離如果以兩倍快的相對速度運動，兩者由單一望遠鏡所觀測到的繞射光變曲線幾乎沒有區別，無論是在地面還是在外太空。下式就是在黃道面上考慮橢圓軌道而得出的相對速度垂直視線方向的分量， $v_{\oplus}$ 、 $r_{\oplus}$  是地球的公轉速度和距離(即 1 AU，假設是圓形軌道)， $\phi$  是觀測的相位角(小行星-地球-太陽夾角)， $a$ 、 $e$ 、 $r$  分別是小行星的半長軸、離心率和觀測瞬間的距離。一般的三度空間運動則沒有簡單的公式表示。

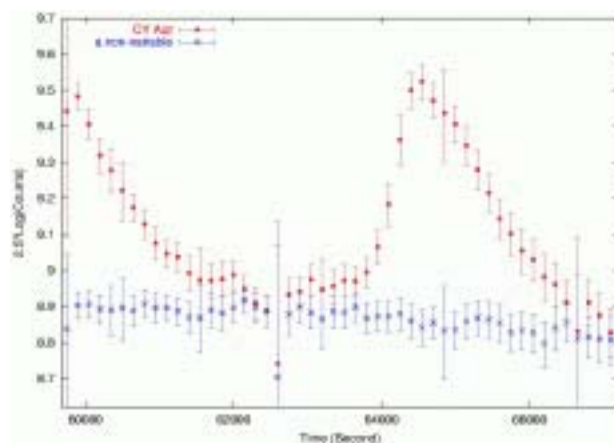
$$\begin{aligned} (\dot{v} - \dot{v}_{\oplus})_{\perp} = & v_{\oplus} \cos \phi - v_{\oplus} \sqrt{\frac{r_{\oplus} a}{r^2} (1 - e^2)} \sqrt{1 - \left(\frac{r_{\oplus}}{r}\right)^2 \sin^2 \phi} \\ & - v_{\oplus} \sin \phi \left(\frac{r_{\oplus}}{r}\right) \sqrt{r_{\oplus} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a}{r^2} (1 - e^2)\right]} \end{aligned}$$

雖然相對速度多半由地球公轉速度來決定，考慮橢圓軌道和三度空間分布的複雜性，它仍然可能有每秒幾公里甚至於十幾公里的不確定性。譬如，令  $\phi = 0$ ，第 8405 號小行星 Asbolus ( $a = 17.9$  AU,  $e = 0.62$ ) 在近日點時的相對速度(垂直視線方向的分量)大約只有每秒 15 公里，似乎必須使用多組的望遠鏡並涵蓋適當大小的區域，才能直接並準確測量出繞射陰影的大小和速度。此外，如果知道目標星的大小，對於距離的估計也會有所幫助。

### 其他的可行研究方向

除了掩星觀測之外，這個計畫的儀器和系統特性或是它將來的科學資料也可以用在其他方面的研究。例如，一些激變星或是其他具有快速光變特性的天體，透過 TAOS 的拉鍊式取像可以有更好的時間解析度。圖五是一顆變星 CY Aqr 的光變曲線[23]，它的變光週期大約是 88 分鐘，亮度約 11 等左右，振幅約四分之三個星等。透過拉鍊式取像得出的結果和文獻上的資料十分接近[24]。TAOS 這型的小望遠鏡可以在很

短的反應時間內迅速指向特定的天區，因而，類似  $\gamma$  射線爆發 (gamma ray burst, 簡稱 GRB) 的後像 (afterglow)，只要亮度夠高，透過全球網路 (GCN) 傳來的座標，很容易就能夠被自動化的 TAOS 望遠鏡拍下，提供第一時間的觀測資料。另外，視野相當於九個滿月大小的 TAOS 望遠鏡在巡天的過程中也有潛力能發現 16 或 17 等以下的新小行星、小彗星或近地天體 (near Earth object)，不過這需要一些不同的軟體來進行分析的工作。



圖五 利用拉鍊式取像法觀測到的變星 CY Aqr (天鷹座) 光變曲線。變光週期約 88 分鐘。採用的曝光取樣時間是 0.3 秒，圖中每個點都是 150 秒(五百次)未經處理原始資料的平均值。較平緩的是另一顆星的光變曲線，可相互參考比較。(原始影像由金升光使用 TAOS A 望遠鏡拍攝，拍攝時間 2003 年 9 月 16 日，光度測定數據由張智威提供)

### 註釋及參考資料

- [1] TNO 或 SDO 的最新資料請參閱國際天文聯合會小行星中心 (IAU/MPC) 的相關網頁，例如 <http://cfa-www.harvard.edu/cfa/ps/lists/TNOs.html> 和 [Centaurs.html](http://cfa-www.harvard.edu/cfa/ps/lists/Centaurs.html)。最新的研究訊息可以參考美國西南研究所的電子期刊 *Distant EKO's* (The Kuiper Belt Electronic Newsletter)，隔月出刊，網址 <http://www.boulder.swri.edu/ekonews>。關於古柏帶的雙行星系統請參閱 K. S. Noll, *Earth, Moon and Planets*, 92, 395 (2003)
- [2] M. E. Brown, C. A. Trujillo, and D. Rabinowitz, "Discovery of a candidate inner Oort cloud planetoid", *ApJ Lett.*, in press

- [3] R. L. Allen and G. M. Bernstein, *ApJ Lett.*, 549, L241 (2001)
- [4] C. A. Trujillo, D. C. Jewitt, and J. X. Luu, *AJ*, 122, 457 (2001)
- [5] G. M. Bernstein et al., *AJ*, 128, 1364 (2004)
- [6] S. J. Kenyon and B. C. Bromley, astro-ph/0406556
- [7] M. J. Duncan and H. F. Levison, *Science*, 276, 1670 (1997)
- [8] 外太陽系行星的搜尋和研究是近年熱門的題目，網站上有比較新而齊全的資料，讀者可以試試搜尋引擎或直接參考巴黎天文台的相關網頁 <http://www.obspm.fr/planets>
- [9] M. C. Wyatt et al., *Earth, Moon and Planets*, 92, 423 (2003), J. S. Greaves et al, *MNRAS*, 351, L54 (2004)
- [10] 溫志懿，物理雙月刊二十卷四期 p.469-472 (1998年8月)
- [11] S. K. King, *ASP Conf. Ser.* 246, 253 (2001), C. Alcock et al., *Earth, Moon, and Planets*, 92, 459 (2003)
- [12] TAOS 計畫網站 <http://taos.asiaa.sinica.edu.tw>
- [13] O. Fors, J. Núñez, and A. Richichi, *A&A*, 378, 1100 (2001)
- [14] O. Fors, E. P. Horch, and J. Núñez, *A&A*, 420, 397 (2004)
- [15] T. Axelrod and A. Wang, private communication
- [16] 陳文屏，科學發展(付印中)，或參考網站 [http://www.astro.ncu.edu.tw/contents/faculty/wp\\_chen/wp\\_chen/news2004.02.23.htm](http://www.astro.ncu.edu.tw/contents/faculty/wp_chen/wp_chen/news2004.02.23.htm)
- [17] C. L. Liang et al. astro-ph/0209509
- [18] J. Luu and P. Lacerda, *Earth, Moon, and Planets*, 92, 221 (2003)
- [19] F. Roques and M. Moncuquet, *Icarus*, 147, 530 (2000)
- [20] A. Cooray, *ApJ Lett.*, 589, L97 (2003)
- [21] F. Roques et al., *ApJ Lett.*, 594, L63 (2003)
- [22] F. Roques, M. Moncuquet, and B. Sicardy, *AJ*, 93,

1549 (1987)

[23] W. P. Chen et al., *Baltic Astronomy*, 12, 568 (2003)

[24] J. M. Powell, M. D. Joner, and D. H. McNamara, *PASP*, 107, 225 (1995)

---

---

#### 作者簡介

金升光

國立清華大學物理博士，現任職於中央研究院天文及天文物理研究所籌備處

TAOS project scientist

[MAILTO:skking@asiaa.sinica.edu.tw](mailto:skking@asiaa.sinica.edu.tw)

<http://www.asiaa.sinica.edu.tw/~skking/>