物理奧林匹亞競賽試題與解答

國立台灣師範大學物理系
林明瑞
e-mail: mjlin@phy.ntnu.edu.tw

本刊徵得物理奧林匹亞選訓委員會的同意，每期精選若干試題和解答，以饗讀者。本期繼續刊登二題。

【本期試題評註】

物理的學習貴在「活學活用」。在我們的生活經驗中，有許多事情就是物理定律的體現。撞球台上的球碰球的過程，就是鮮活的力學實驗。體操選手在單槓上的大迴旋，可以用力學定律來分析和檢視。我們說：「在生活中處處可見物理，而在物理中處處反映生活」。

一、(a)如圖 1-1 所示，在一摩擦可忽略的水平檯面上，一光滑剛球 A 以 v_0 的初速，彈性碰撞其他三個同樣的剛球 B、C、和 D，其中 C 和 D 兩球的聯心線垂直於 A 球的入射方向，且三球之間彼此緊密接觸。假設 A 球對準 B 球的球心正向碰撞，試求碰撞後這四個球的速度？

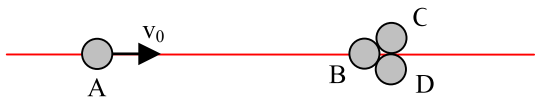


圖 1-1

(b)承上題，但 B、C、和 D 三球的排列如圖 1-2 所示， A 球以同樣的初速 v_0，沿著 C 和 D 兩球連心線的中垂線射入，彈性碰撞這三球。試求碰撞後這四個球的速度？

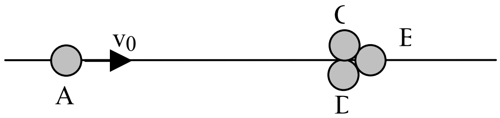


圖 1-2

解：(a)先考慮 A 球碰撞 B 球，由於兩球質量相等且為正面碰撞，故碰撞後兩球交換速度，即 A 球靜止，B 球以速度 v_0 向右運動，同時碰撞 C 和 D 兩球。由於球面光滑，所以 B 球和 C 球之間，以及 B 球和 D 球之間的交互作用力，皆沿著兩球聯心線的方向作用。故碰撞後，B 球的運動方向平行於入射方向，C 和 D 球的運動方向則分別沿著和 B 球聯心線的方向離開，其情形如圖 1-3 所示。因為 C 球和 D 球相對於入射線呈鏡像對稱，所以 $v'_C = v'_D = v'$。

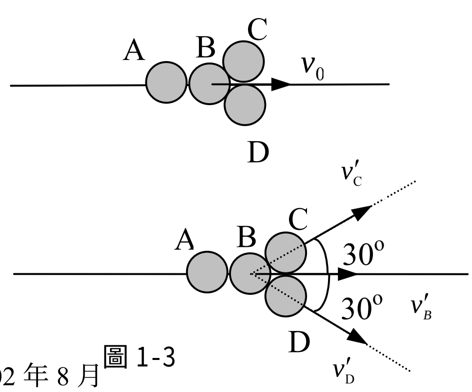


圖 1-3

由動量和能量守恆定律可得

$$mv_0 = mv'_{\rm B} + 2mv'\cos 30^\circ$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_{\rm B} + 2\times\frac{1}{2}mv'^2$$

聯解上二式，可得 $v'_{\rm B} = -\frac{1}{5}v_0($　　　　$)$， $v' = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$。當 B 球向左反彈時，又碰撞靜止中的 A 球，兩球再度交換速度，故最後四個球的速度分別為

A 球：$-\frac{1}{5}v_0($?　　　　　　$)$；

B 球：靜止；

C 球：

$\frac{2\sqrt{3}}{5}v_0($　　　　　　　$30^\circ)$；

D 球：

$\frac{2\sqrt{3}}{5}v_0($　　　　　　　$30^\circ)$。

(b)先考慮 A 球和 C、D 兩球之間的碰撞（註：B 球未畫出）。由於球面光滑，所以兩球間的交互作用力沿著兩球聯心線的方向作用，故碰撞後，C 和 D 球的運動方向分別沿著和 A 球聯心線的方向離開，如圖 1-4 所示。因為 C 球和 D 球相對於入射線呈鏡像對稱，所以 $v'_{\rm C} = v'_{\rm D} = v'$。

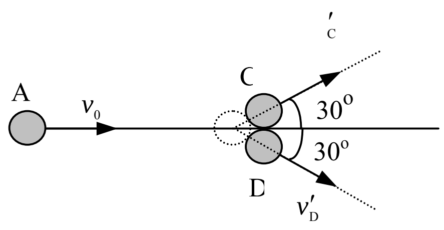


圖 1-4

由動量和能量守恆定律可得

$$mv_0 = mv'_A + 2mv'\cos 30^\circ$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_A + 2\times\frac{1}{2}mv'^2$$

聯解上二式，可得 $v'_A = -\frac{1}{5}v_0($　　　　$)$， $v' = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$。

依次考慮 C、D 球和 B 球的碰撞，同樣由於作用力皆沿著聯心線的方向，且因對稱，所以碰撞後，B 球沿著入射線的方向離開；C 與 D 球則和入射線夾成 θ 角，呈鏡像對稱， $v''_{\rm C} = v''_{\rm D}$，如圖 1-5 所示。

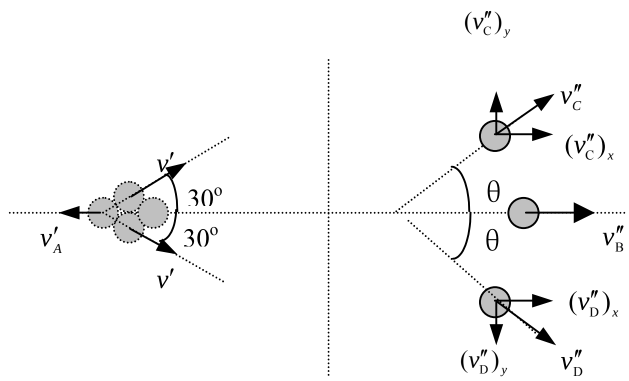


圖 1-5

由動量守恆定律得：

在 x- 方向：

$$2\times mv''_{\rm C}\cos\theta + mv''_{\rm B} = 2\times mv'\cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2v''_{\rm C}\cos\theta + v''_{\rm B} = \frac{6}{5}v_0 \quad \ldots(1)$$

在 y-方向： $(v''_{\rm C})_y = (v''_{\rm D})_y = v''_{\rm C}\sin\theta$；

就 C 球而言，當 C 球碰撞 B 球時，C 球在兩球的聯心線方向上受有一衝量，如圖 1-6 所示：

$$\left(P_{\mathrm{C}}\right)_x = -\left(v''_{\mathrm{C}}\cos\theta - v'\cos 30^\circ\right)$$

$$= -\left(v''_{\mathrm{C}}\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\left(v''_{\mathrm{C}}\cos\theta - \frac{3}{5}v_0\right)$$

$$\left(P_{\mathrm{C}}\right)_y = v''_{\mathrm{C}}\sin\theta - v'\sin 30^\circ$$

$$= v''_{\mathrm{C}}\sin\theta - \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0\cdot\frac{1}{2}$$

$$= v''_{\mathrm{C}}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{5}v_0$$

$$\Rightarrow\quad \tan 30^\circ = \frac{\left(P_{\mathrm{C}}\right)_y}{\left(P_{\mathrm{C}}\right)_x} = \frac{v''_{\mathrm{C}}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{5}v_0}{-\left(v''_{\mathrm{C}}\cos\theta - \frac{3}{5}v_0\right)}$$

$$\Rightarrow v''_{\mathrm{C}}\cos\theta = \frac{6}{5}v_0 - \sqrt{3}v''_{\mathrm{C}}\sin\theta \text{....................(2)}$$

由能量守恆定律得：

$$2\times\left(\frac{1}{2}mv''^2_{\mathrm{C}}\right) + \frac{1}{2}mv''^2_{\mathrm{B}} = 2\times\left(\frac{1}{2}mv'^2\right)$$

$$\Rightarrow\quad 2v''^2_{\mathrm{C}} + v''^2_{\mathrm{B}} = \frac{24}{25}v_0^2 \text{..............................(3)}$$

由(1)和(2)式可得

$$v''_{\mathrm{C}}\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}v_0 - v''_{\mathrm{B}}\right) \text{.............................(4)}$$

$$v''_{\mathrm{C}}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{6}{5}v_0 + v''_{\mathrm{B}}\right) \text{........................(5)}$$

將(4)和(5)代入(3)，可得

$$v''_{\mathrm{B}} = \frac{12}{25}v_0\text{，}\quad v''_{\mathrm{C}} = \frac{2\sqrt{57}}{25}v_0$$

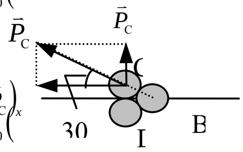
以之代入(4)和(5)式，可得 $\tan\theta = \frac{7\sqrt{3}}{9} \quad\Rightarrow \theta = 53.4^\circ$

碰撞後，各球的速度如下：

A 球：$-\frac{1}{5}v_0$(?　　　　　　　　)；

C 球：$\frac{2\sqrt{57}}{25}v_0$(　　　　　　53.4°)；

D 球：$\frac{2\sqrt{57}}{25}v_0$(　　　　　　53.4°)；



B 球：$\frac{12}{25}v_0$(?　圖 1-6　　　　)。

二、一體操選手在單槓上表演雙手直體大迴環，如圖 2-1 所示。當他轉至最高點時(即頭下腳上地垂直豎立在單槓上)，手掌感覺不需施力抓住槓身，而不致於使身體飛出。這時他鬆手離槓，盡量曲身收攏身體，在空中翻了若干圈的觔斗後，躍落至地面。假設單槓的高度為 2.5m，該選手的身長為 1.70m，質量為 60kg 其身體伸直時相對於質心的轉動慣量為 $I_0 = 20.0kgm^2$，身體收攏時相對於質心的轉動慣量為 $I = 5.0kgm^2$，又當其身體伸直時，質心的位置和槓身之間的距離為 1.0m；當其躍落地面時，質心離地的高度為 0.5m。掌心和槓身之間的摩擦力，以及空氣阻力的影響，皆可忽略不計，回答下列問題：

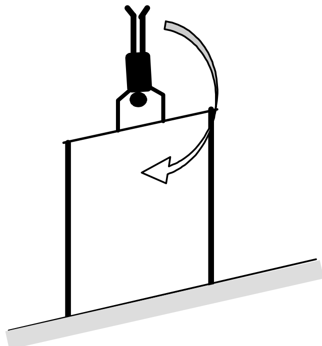


圖 2-1

(a)當此選手轉至最高點時，其速度為何（大小和方向）？

(b)當此選手轉至最低點時，每一隻手所承受的拉力大小為何？

(c)當此選手轉至最高點時，其身體相對於質心的角速度大小為

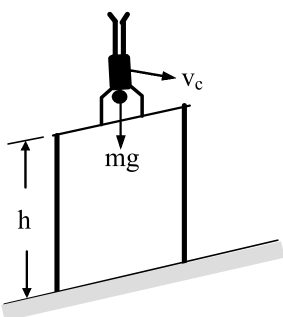


圖 2-2

何？

(d)此選手在鬆手離槓後, 在空中至多可翻多少圈的觔斗？

解：

(1) 當體操選手轉至最高點時，按題意知手掌的拉力為零，所以本身的重量即為維持圓運動所需的向心力，設 r 為其質心和槓身之間的距離，則

$$\frac{mv_c^2}{r} = mg$$

$$\Rightarrow \quad v_c = \sqrt{gr} = \sqrt{9.8 \times 1.0} = 3.1 m/s$$

方向為水平向前。

(2) 當此選手轉至最低點時，維持圓運動所需的向心力，來自雙手的拉力和本身的重量，即

$$2T - mg = \frac{mv_c'^2}{r}$$

由力學能守恆定律得

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_c'^2 + \frac{1}{2}I_c'\omega_c'^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_c^2 + mg(2r)$$

$$\because \omega_c' = \frac{\mathrm{v}_c'}{r}, \quad \omega_c = \frac{\mathrm{v}_c}{r}$$

$$\therefore \frac{1}{2}I_c'\omega_c'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_c'}{r^2}\right)\mathrm{v}_c'^2, \quad \frac{1}{2}I_c\omega_c^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{r^2}\right)\mathrm{v}_c^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_c'}{r^2}\right)v_c'^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_c}{r^2}\right)v_c^2 + 2mgr$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(60 + \frac{20}{1.0^2}\right)v_c'^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(60 + \frac{20}{1.0^2}\right) \times 9.8 \times 1 + 2 \times 60 \times$$

$$\Rightarrow \quad v_c'^2 = 4.0 \times 9.8 (m/s)^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\left(mg + \frac{mv_c'^2}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(60 \times 9.8 + \frac{60 \times 4.0 \times 9.8}{1}\right)$$

$$= \frac{5}{2} \times 60 \times 9.8 = 1470 \approx 1500N$$

$$T = 2.5mg = 150$$

(3) 當此選手轉至最高點時，其身體相對於質心的角速度大小為

$$\omega_c = \frac{v_c}{r} = \frac{3.1}{1.0} = 3.1 rad/s$$

(4) 此選手在鬆手離槓後, 對於質心而言, 合力矩為零, 根據角動量守恆定律, 可得身體收攏時的角速度 $\omega_c''^2$。

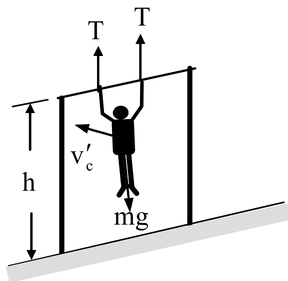


圖 2-3

$$I_c''\omega_c'' = I_c\omega_c$$

$$\Rightarrow \quad \omega_c'' = \frac{I_c\omega_c}{I_c''} = \frac{20.0 \times 3.1}{5.0} = 12 rad/s$$

此選手在空中停留的時間可計算如下：

$$(h + 1.0) - 0.5 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(h + 0.5)}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (2.5 + 0.5)}{9.8}} = 0.78s$$

他在空中所能翻的觔斗圈數 n 為

$$n = \frac{\omega_c''t}{2\pi} = \frac{12 \times 0.78}{2\pi} = 1.5$$