

我是怎麼被丘彼得射中的

盛博納

我的大學成績在物理系是前百分之三十，若是要用課堂上聽來的專有名詞去騙騙學歷史的傻女孩，想來也是綽綽有餘才對。可惜我身材稍胖(90公斤)，有點近視(850度)，再加上唸高中時不曉得臉上的青春痘是不可用手擠壓的，害得我進了 T 大近四年卻從沒輪值到在女生宿舍前站崗的機會。雖然死黨阿明、小瑜和 Smart 豪屢以「天涯何處無芳草」來安慰我，但是他們三人合起來不但包辦了班上成績的前百分之五，長得又很不抱歉，那裏會知道那種芳草都被好馬吃掉的酸苦？

雖然腳踏車後面沒有載女孩子是有點丟臉，但日子總是要過的，所以我通常是把各種教科書堆疊綁到車後。這樣做的目的當然只是想讓不知情的人以為我是因書太多所以才無法負起接送校花的任務。雖然這有點阿 Q，但只要阿 Q 自己滿意，誰又管得著呢？

話說那一天阿 Q 又載著滿車「學問」趕赴一門「只消點名到，九十分算少」的超營養課，卻被半路殺出來的另一輛眼睛長在背後的自行車給絆倒。胸中一股惡氣正待發作，才發現倒在地上的女孩長得比小燕子趙薇還漂亮，溢到嘴邊的國罵當然也硬生生地給壓回肚內，還故作紳士狀地去把她扶起來。當她看到我散得一地的書中既有相對論量子力學、又有古典力學時，竟然忘記了整個車禍事件，還睜大靈動的雙眼問我是不是學物理的。我以

布萊得彼特的酷樣點了點頭，她竟然高興地拍手說有救了，然後問我能不能教她一個相對論的習題！你想想，就算成績是倒數百分之三的男生也不會笨到承認自己相對論曾被死當吧？我當機立斷，問明題目，然後推說這個問題的答案解說不易，可能得明晚到 Starbucks 去才可仔細解釋清楚，沒想到這個動物系的漂亮寶貝竟然一口答應！（嘿，原來傻女孩不只歷史系才有！——不過動物系的普物竟然教起相對論來？這位教授也實在是太狠了）

當天下午我立刻找來阿明和 Smart 豪商討解答(小瑜在這該死的節骨眼竟然回台南老家去了)，以便為次日的咖啡之約作準備。原來該題目是說有兩個騎士分別握著五公尺及四公尺的長、短矛衝向對方進行決鬥(為了爭取美人青睞?)。決鬥的規則是先行刺到對方的人才可側閃躲開對手的攻擊而保命。但是因為相對論說運動中的矛會變短，所以只要他們互衝的相對速度夠快，則持短矛的人可能會發現對方的矛已縮短成三公尺，而既然他自己的矛始終維持在四公尺長，他當然會安心認定自己必能先發制人並成功避開對手的「長」矛。問題是：持長矛的對手若從自身的觀點出發，用同樣的思維來分析整個情勢，則他顯然更有資格認為能逃離死神的是自己。如此一來，雙方都可刺死對方，而且也都能順利躲開對手的刺殺，這矛盾可真是出大了！

這個詭異的難題經過我這兩個死黨用羅倫茲轉換算了半天，得到的答案竟然是：持短矛的騎士會死（這我能接受），但他會像靈異事件般死得莫名其妙，因為他的四公尺長矛在尚未碰到對方胸口前竟然會開始意外的縮短！（還是對手的三公尺「長」矛會莫名其妙地變回原始的五公尺長？唉，反正我是聽得一個頭兩個大就對了）

我雖然不像這些死黨一樣是拿書卷獎的料，但腦子裏裝的灰白質也還沒完全退化成豆花。一聽到他們竟然可以用公式證明出來世界上有靈異事件，我心中登時涼了半截。要是把這些話原封不動地搬到 Starbucks 內，那我是絕對休想要續杯了。俗語說「重色之下必有勇夫」，我也顧不得朋友情誼，當下立刻從宿舍飛奔回系館求援。這一次我直上七樓，找上素有雞蛋裡也能挑出狗骨頭「美譽」的歪歪教授。找他的原因有兩個：系上某教授以前在雙月刊上撰文時曾提到他對於普物問題似乎偶而會有一些脫軌的看法；另外一個原因是兩周前我才幫他把中毒電腦內的資料救了回來，所以這一次他可能會慷慨回報。

歪歪教授歪著頭聽完我的故事後便陷入深思。十分鐘後當他再度抬頭時，眼中竟露出戲謔的神色，接著他做的第一件事竟是把題目中的騎士換成我本人以及手執五公尺長箭的丘彼得，遊戲規則也換成：如果愛神的箭先刺到我，那祂便大功告成而可揚長而去；但若是我的四公尺短箭先碰到丘彼得，那我就得立刻閃開、靠自己去找老婆。雖然我曾抗議說這樣做根本是換湯不換藥，他卻反問我到底是比較喜歡血腥還是寧可被愛神的箭射到？接著更是自顧自地喃喃說起為什麼相對論保證我一定會被愛神的箭射中（哇，好棒！）。由於歪歪教

授的解說真的成功地使女孩在 Starbucks 內留到晚上十點半，還讓我騙到了她的手機號碼、並爭取到護送她回內湖家的任務，我遂決定將之公諸於世，以便物理同好將來也能爭取到邀女孩喝咖啡的機會。

首先要提醒你的是：我怎麼【知道】朝我快速衝來之丘彼得的箭對我來說只有三公尺長呢？顯然我必須叫我的死黨沿著愛神必經之路上一字排開，並叮囑他們在正午十二點鐘的時候同時測量決定出愛神之箭的頭尾位置，然後請他們把測量結果回報給我。接著我從「阿明當時剛好測到箭頭」及「站在阿明北方三公尺處的 Smart 豪剛好測到箭尾」這兩個回報結果便可輕易推知愛神之箭對我來說果然只有三公尺長（而且是朝南正對我射來）。

好，那你知不知道我【看到】的愛神之箭有多長呢？答案是超過五公尺！原因很簡單：能同時進到我眼中而被我【看到】的光線其實是在不同時刻分別從不同的位置發射出來的。例如，我看到的箭尾因為比箭頭還遠了三公尺，所以該光線必然是在稍早的時刻便已從箭尾射出來。但因為整枝箭是向我衝來，所以「稍早」的時候箭尾所在的位置顯然還更遠些，所以我【看到】的愛神之箭必定超過三公尺長。更進一步說，這個所謂「稍早」的時間差顯然等於箭長（三公尺）除以箭尾光線追趕上箭頭的有效速度。所以丘彼得衝過來的速度越快，箭尾光線就要花更多時間才追得上箭頭，因而整枝箭被我【看到】的長度就越比我所【知道】的長度更長。實際計算顯示出來，我【看到】的長度恆大於箭的原長（五公尺）。

說文解字：

假設愛神之箭原長是 l_2 ，則我由羅倫茲轉換式【知道】運動中的箭只有 l_2/γ 的長度。但我【看到】的箭長卻是追趕的時間乘上光速，亦即

$$\frac{l_2/\gamma}{c-v}c = l_2 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} > l_2,$$

其中 v 是丘彼得向我衝來的速度。今若我自己的箭長是 l_1 ，且已知它是小於 l_2 ，則我【看到】的愛神之箭更是會比我自己的箭長了。

所以如果我們回到原來那個兒童不宜的決鬥問題上，則持短矛的騎士光是看到對方衝過來的矛就應該心生恐懼才對！因為對手的矛【看起來】不但不是縮成三公尺，反而是長於自己的四公尺短矛哩！

當然啦，受過高等教育的我們是絕不可能被這種眼睛看到的表象所輕易騙倒的。要摒除這些視象的蠱惑，我們大可閉起眼睛，冥想著此刻愛神之箭的箭尾剛好通過我的箭頭處。而既然這表示我的箭已碰到丘彼得，我也只好依約躲開，趕快去主動追求自己的幸福了。（而丘彼得那根縮成三公尺長的箭自然更沾不上我身了。）可是且慢！我怎麼能夠肯定說我的箭頭真的已碰到丘彼得的身子了呢？在相碰觸的那一剎那，顯然我的箭頭一定要向我握箭的手「頂」一下才能讓我獲知此一訊息。

但這個「頂」字就大有學問了，因為這等價於剛好站在該處的死黨 Smart 豪必須向我【回報】給

愛神的箭尾確實正好通過當地。

Smart 豪的回報方式當然有很大的創意空間，例如尖叫一聲引起我的注意、投一粒棒球過來砸我，或者利用我的短箭箭身送來一個彈性波訊號等等。但是因為任何訊號的傳遞速度都不可能超越光速，所以最快、最有效的報訊方式就是發射一道光來通知我。

從愛神的箭尾處送出一道光訊號來通知我？嘿！這個招數很眼熟——它根本就是和前面所說的用眼睛直接看丘比得的箭有多長是同一回事嘛！（記得嗎？我們看得到箭尾是因為箭尾發了一道光。）既然前面的論述已經告訴我們愛神的箭看起來一定比我自己的箭長，這表示 Smart 豪的訊號尚未送到我手上之前，我就已經先中了愛神的箭，腦中充滿的只有美女巧笑的音容了！

所以我究竟是怎麼被丘比得射中的呢？前面饒舌了半天還說不清的道理，其實可以很簡單地總結如下：

愛神的箭先天就比我的還長，而我也確實【看到】祂有一枝比我還長的箭。遵守遊戲規則的我則眼睜睜地【看著】那枝箭自遠而近直挺挺地射入我的心房。而即便是在射入的那一刻，我既【看不到】自己的箭頭欺近丘比得的景象（因為我的箭【看起來】真的是比較短），也【察覺不出】任何祂有被我的箭碰上的跡象。

換言之，我未閃躲開來的原因是：在被射到之前，我完全沒有方法可確定我已先動得點——早一

步頂到丘比得。而且這一切發生的很「自然」，既沒有矛盾、也沒有長度忽然伸長或縮短的靈異現象發生。當然，初步的分析也不需要借用到廣義相對論中關於加速度的論述。

雖然故事到此圓滿結束，而被愛神射中的我也有了和女孩喝咖啡的話題，但是少有學生找他聊天的歪歪教授卻似乎很不甘心就此放過一隻自己送上門的大笨鵝，竟意猶未盡地進一步烤問我：「如果你真的瞭解我的意思，那你不能指出來當初問題的矛盾所在以及解答的關鍵到底是什麼？」

我搖了搖頭，意思是「所有該強調的、該說的都已經被老師您講光了，而我也很感激地完全同意了您的說詞，真不懂您為何還有此一問」。不過教授顯然是會錯意，邊笑邊摸著花白的鬢髮得意地說道：「我猜你大概也是想不出來的。」接下來就逕自在黑板上畫了一個用箭號組成的「三角形」（如圖一）。不曉得是因徒手繪圖的關係還是故意的，AB 邊和 BC 邊看起來並不是很直。

「這是一個時空圖，橫軸是空間、縱軸是時間。」（這個我懂，每個普物老師都會教。）

「A 點是你的箭尖碰上丘比得這個事件，從 A 到 B 這個箭號對應的是這次碰撞的訊息經由某種方式傳遞到你這裏，B 當然就是你感受到箭頭被丘比得頂了一下下這個事件。」教授忽然間回頭對我吐了一個舌頭，「你不至於把這個三角形中的箭號當成我們故事中的長短箭吧？」

「沒這麼白癡啦！」我也笑著回吐了一個舌頭。同時我也恍然大悟。AB 邊不畫成直線段的理由顯然是因為這個傳遞過程不一定要由走直線

的自由運動粒子(如光子)或聲波來做媒介。

「B 到 C 代表的是你察覺箭頭刺到丘比得以後所做的反應。例如 C 也許對應於你往旁邊閃開五千公里，打算到美國交洋女友去了。」（嗯，我本來就打算在畢業、服完兵役後到美國留學的。）

「但是為了方便起見，我們假設 C 是丘比得的箭剛射中你的那一刻發生的事。」

「教授，您的意思是說我在確定已刺中丘比得後(事件 B)，還有時間從容反應，甚至乾脆坐在那兒等著愛神之箭射中我(事件 C)？」

「沒錯。」

「可是您剛剛不是才花了不少口舌說服我這是不可能的？」

「喔，是沒錯。所以我現在想用反證法去說明這確實是辦不到的事。」這下我真是敗給教授了！他明明已經有了一個可以解釋原有矛盾的簡潔論調，為什麼還要畫蛇添足一番？

可是等到聽完他的新解後，我的觀感還真是有了極大的改變，也同時佩服起出這道怪題的普物老師。原來歪歪教授看出了這個問題很容易推廣，並且用一些我們學相對論時用到的名詞與簡單概念便可將之搞定。我現在把大意整理如下供眾人參考。

首先，是一點標準相對論中的玩意兒：

幼稚園程度相對論：

1. 兩個時空中的向量 $\vec{w}_1 = (t_1, r_1)$ 及 $\vec{w}_2 = (t_2, r_2)$ 的內積是 $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = -c^2 t_1 t_2 + r_1 \cdot r_2$
2. 一個時空中的向量 $\vec{w} = (t, r)$ 的「長度平方」指

的是 $\vec{w} \cdot \vec{w}$ 。若這個值是負的，那我們就稱它為 time-like。但若此值大於零，我們則稱它為 space-like。

接下來則是幼稚園畢業後要學的相對論：

小學程度相對論：

- 一個時空中的事件間隔向量 $\Delta \vec{w} \equiv (\Delta t, \Delta \underline{r}) \equiv (t_2, \underline{r}_2) - (t_1, \underline{r}_1) \equiv \vec{w}_2 - \vec{w}_1$ 如果是 space-like，則表示我們可以找到兩個具有相對運動的不同慣性座標系，使得 w_1 和 w_2 這兩件事發生的時間次序在這兩個座標系中是【顛倒過來】。要看出這一點，我們可以假設這兩個座標系是沿著 x 及 x' 軸在做相對運動，且假定 $\Delta x > 0$ 。則由 space-like 的條件 $-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 > 0$ 及羅倫茲轉換式
$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \frac{\Delta x}{c\Delta t} \right)$$
 可以看出只要慎選撇號座標系的運動速度 v 便可使括號內的數值為負。這樣便證明完畢。
- 反之，time-like 之事件間隔向量表示兩個事件間允許因果關係的存在，因為我們可以找到一個做適當運動的自由粒子去連接這兩個事件。而且我們絕不可能找到兩個慣性座標系去看問題而發現事件發生的次序是顛倒過來的。

現在我們可以進行一點簡單的代數運算：

中學的代數：

- 兩個時空中的事件間隔向量 $\Delta \vec{w}_1$ 及 $\Delta \vec{w}_2$ 如果都是 time-like，且 Δt_1 及 Δt_2 均大於零（這表示事件是依序發生），則 $\Delta w \equiv \Delta w_1 + \Delta w_2$ 一定也是個 time-like 的事件間隔向量。由於這個證明太簡單，我們就從略吧。
- 假設我們把一個物理過程分解為許多小小的 time-like 事件間隔向量 $\Delta \vec{w}_1$ 、 $\Delta \vec{w}_2$ 、 $\Delta \vec{w}_3$ 的合成（這個分解方式當然也直接蘊涵每個 Δt_i 都大於零），則利用數學歸納法我們可以證出 $\Delta \vec{w}_1 + \Delta \vec{w}_2 + \Delta \vec{w}_3 + \dots$ 也一定是 time-like。換句話說，任何物理過程的起點和終點所形成的事件間隔向量恆是 time-like。

有了以上的預備知識，歪歪教授就一口氣做了以下的推斷：

大學教授的證明：

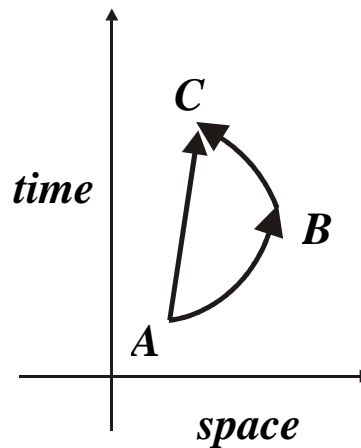
愛神的長箭射到你且被你感覺到 ($A \rightarrow B$)，這是 time-like。你接下來做的任何反應 ($B \rightarrow C$) 也是 time-like。這兩個過程的合成效果 (\overline{AC}) 自然也必是 time-like。

可是因為你們的互衝速度很快，你根據相對論【知道】愛神的箭會縮成比你自己的短箭還短，因此你認定自己應該先刺中丘比得(事件 A)。但反過來看，丘比得則認定是祂的箭會先射中你(事件 C)。所以這兩個制由事件所定義出來的重

事件間隔向量(\overline{AC})必定是 space-like; 因事件發生次序可以因人而異、顛倒發生。

以上這兩個不相容的結論表示: 如果你真的能確認自己是刺到丘比得($A \rightarrow B$), 那你絕不可能接著還看到丘比得射中你($B \rightarrow C$)。所以一定是你中箭在先(事件 C), 然後握箭的手才感受到你的箭尖其實早已抵住丘比得(事件 B), 因此你才未依遊戲規則先閃開。

而這個論證的好處顯然是: 它的普適性較大, 不論箭是彎的還是直的、箭尖刺到人時是如何被頂回去、以及騎士如何反應等, 這些因素都不會影響最後的結論。類似之 paradox 也可用這種幾何構圖法去解決。



講了半天, 那麼當初問題的矛盾所在以及解答的關鍵到底是什麼呢? 我相信這一次我應該已掌握了:

1. 任何兩件可以構成 space-like 事件間隔向量的事情 E_1 及 E_2 都可以拿來製造(假)「矛盾」。
2. 故事中人在經歷其中一個事件 E_1 後, 接下來所進行的任何動作與測量都只能用以創造出一個自 E_1 出發的 time-like 間隔向量。
3. 所以不論故事中人怎麼聰明, 他永遠不可能讓自己置身於 E_2 事件而造成真正的矛盾。

圖一: