# 物理奧林匹亞競賽試題與解答

國立台灣師範大學物理系
林明瑞
e-mail: mjlin@phy.ntnu.edu.tw

本刊徵得物理奧林匹亞選訓委員會的同意，每期精選若干試題和解答，以饗讀者。上期首次刊登二題，頗獲讀者歡迎，本期繼續自國內物理奧林匹亞選拔試題中精選二題，供讀者參考。

【第一題評註】：哈柏定律是支持宇宙膨脹理論的重要實驗發現。從理論觀點來看，要導出哈柏定律並不是難事，實際上僅需應用萬有引力定律及簡單的微積分，即可導出。

一、根據霹靂說(The Big Bang Theory)，現今宇宙中的所有物質在太始之初是縮聚在一點，在某一瞬間(定義為 t=0)突然爆炸開來，往各方向均勻膨脹。經許多年後，形成現在的宇宙，仍然在膨脹中。宇宙中所見的任一星系(Galaxy)，對整個宇宙而言，相當於一個質點。任何一個星系都可選作為宇宙的中心，其他的星系相對於該星系的速度，皆沿徑向遠離（即對此中心為球形對稱）。假設宇宙間的質量分布是均勻的，又各星系之間僅有萬有引力的作用，回答下列各題：

(a) 選取某一星系（例如我們所在的銀河系）為坐標原點，考慮徑向坐標為 r 的另一星系的運動情形。設在半徑為 r 的球體內所含物質的總質量為 M，萬有引力常數為 G，寫出該星系的運動方程式。

(b) 假設當 $r\to\infty$ 時，該星系的徑向速度 $\dot{r}\to 0$，試求該星系的徑向速度和其徑向坐標之間的函數關係。

(c) 繼續題(b)，試求徑向坐標 r 和時間 t 之間的函數關係。

(d) 美國天文學家哈柏經由觀察得知：$\dot{r}=Hr$，稱為哈柏定律，式中 $H$ 為哈柏常數。測得 $H$ 值約為 $0.5\times10^{-10}\,yr^{-1}$，試求現在所見宇宙的年齡。

解：

(a) 由於題中假設宇宙間的質量分布是均勻的，所以對於坐標原點而言，應為球形對稱。設所考慮的星系的質量為 m，徑向坐標為 r，在半徑為 r 的球體內所含的總質量為 M，則該星系所受的萬有引力為

$$\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}\quad\text{.................................(1)}$$

其運動方程式為

$$m\ddot{\vec{r}}=-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow\quad \ddot{r}=-\frac{GM}{r^2}\quad\text{............................................(2)}$$

式中 M 為常數，這是因為半徑為 r 的球體內所含的物質皆一起膨脹，所以其總質量 M 不變。

(b)將(2)式積分可得

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = C \quad \cdots\cdots(3)$$

式中 C 為積分常數。按題設當 $r \to \infty$ , $\dot{r} \to 0$，所以 C = 0。(3)式可寫為

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \cdots\cdots(4)$$

(c)將(4)式積分，可得

$$r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}\right)^{2/3} t^{2/3} \quad \cdots\cdots(5)$$

(d)將(5)代入(4)，得

$$\dot{r} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}\right)^{2/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{-1/3} \quad \cdots\cdots(6)$$

(6)式除以(5)式，得

$$\dot{r} = \left(\frac{2}{3}t^{-1}\right) r = Hr$$

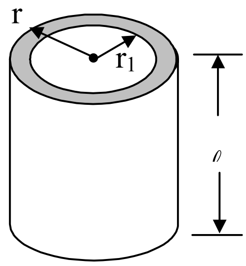
$$\Rightarrow \quad H = \frac{2}{3}t^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}H^{-1} = \frac{2}{3} \times \left(0.5 \times 10^{-10}\right)^{-1} = 1.33 \times 10^{10}\ yr$$

現今所見宇宙的年齡約為 133 億年。

**【第二題評註】**：物理奧林匹亞試題的設計，著重於物理理論和自然現象或生活經驗的結合。本題計算絕緣銅線通電流後的溫度，即是一例。

二、(a)如右圖所示的中空圓柱體，長度為 $\ell$，內外半徑分別為 $r_1$ 和 $r_2$，內外表面分別維持在溫度 $T_1 \quad T_2(T_1 > T_2)$。若此圓柱體的熱導係數為 $\kappa$，求單位時間內自內表面傳導至外表面的熱能。




(b)一般家用電線係直徑為 2.0 $mm$ 的銅導線，其單位長度的電阻為 $5.2\,\Omega km^{-1}$。電線的外面包有一層厚度為 1 $mm$ 的絕緣材料，其熱導係數為 $0.050 Wm^{-1}K^{-1}$，熱輻射發射率為 0.95。今以 20 $A$ 的電流流經此導線，由於空氣的熱導係數很低，因此電流在導線上所產生的熱可視為完全經由熱輻射散熱。設當時大氣的溫度為 $20^{o}C$，試求當導線達成熱平衡時，(i)絕緣層外表面的溫度；(ii)銅導線的表面溫度。（註：史特凡-波滋曼常數 $\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$）

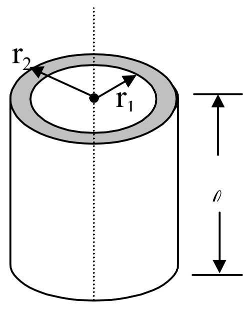
**解：**

(a) 參考下右圖，圓柱體的熱傳導公式為

$$\dot{Q} = -\kappa A \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q} = -\kappa\left(2\pi r \ell\right)\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{r_1}^{r_2} \dot{Q}\frac{dr}{r} = -2\pi\kappa\ell \int_{T_1}^{T_2} dT$$




由於圓柱體的內外表面分別維持在 $T_1$ 和 $T_2$，所以每單位

時間內自內表面傳導至外表面的熱量 $\dot{Q}$ 為一常數，故

$$\dot{Q}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=-2\pi k\ell\int_{T_1}^{T_2}dT$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}=\frac{2\pi k\ell}{\ln\left(r_2/r_1\right)}(T_1-T_2) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(b)(i)電流流經導線所產生的熱功率為

$P=I^2R$，每單位長度所生的熱功率為

$$\frac{P}{\ell}=\frac{I^2R}{\ell}=(20)^2\times(5.2\times10^{-3})=2.08W/m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

設導線絕緣層外表面的溫度為 $T_s$，空氣的溫度為 $T_a$，按題意電流在導線上所產生的熱完全經由熱輻射發散，故

$$e\sigma A\left(T_s^4-T_a^4\right)=P \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\Rightarrow \quad T_s^4=T_a^4+\frac{P}{e\sigma\left(2\pi r\ell\right)}=T_a^4+\frac{P/\ell}{e\sigma\left(2\pi r\right)}$$

$$=(293)^4+\frac{2.08}{0.95\times(5.67\times10^{-8})\times(2\pi\times2\times10^{-3})}$$

$$=1.04\times10^{10}$$

$$\Rightarrow \quad T_s\approx319K=46\,^{\circ}C$$

(ii)設銅導線的表面溫度為 $T_i$，從銅線傳導至絕緣層外表面的熱能等於所輻射散失的熱能。由(1)和(2)兩式可得

$$\dot{Q}=\frac{2\pi\kappa\ell}{\ln\left(r_2/r_1\right)}(T_i-T_s)=P \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\Rightarrow \quad T_i=T_s+\left(\frac{P}{\ell}\right)\frac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi\kappa}$$

$$=319.3+2.08\times\frac{\ln\left(2/1\right)}{2\pi\times0.050}=324K=51^{\circ}C$$