物理在金融現象上的探討

曾玄哲
中興大學物理系
email:tseng@phys.nchu.edu.tw

對於股票加權指數的變化，或者某一支股票的股價隨時間的變化，這樣的金融現象給人的印象是變幻莫測、難以捉摸。仔細想一想，這是一大群人從各自所獲得的知識、消息，在各個不同的時間，作出判斷，下了決定而完成交易所呈現的總體結果。這種牽涉到人的主觀判斷的現象，似乎是難有脈絡可循，與物理現象截然不同。我們知道數不清的原子、分子或電子的運動，雖然也常常不容易理解、掌握，但是我們知道它們都服從鐵一般的定律、遵循一定的運動方程式。然而加權指數、投資人的心理遵循什麼方程式呢？這應該不是物理所要研究的問題。奇怪的是，有些物理學家憑著他們強烈的好奇心，運用物理的工具、方法與觀念，發動了對經濟系統的探索之旅[1]。

我們先來看看金融市場的一些重要的歷史發展。1973 年，貨幣開始在市場上被交易，其價值由遍佈世界的外匯市場決定。自然一天二十四小時都有交易進行。外匯交易量從此以可觀的速率成長。例如 1995 年的交易量是 1973 年的八十倍。衍生性商品的成長更是驚人，1996 年金融衍生市場合約的總值為三十五兆美元。今日，金融市場使大量的金錢、資產以及貨物在全球的競爭環境中交易變得很容易。1980 年，電子交易開始應用到外匯市場中。在電子交易變得普及時，有關金融合約中的數據，或者一件資產的出價、賣價，都以電子方式做適當的儲存。因此，今日我們很容易可以取得大量的電子儲存的金融數據，這些數據是高頻率的，兩筆記錄的相隔時間可以短到幾秒鐘。在金融市場中被儲存而保留下來的種種巨量數據是非常珍貴的，它們相當於一般物理系統中的真實實驗數據一樣，反應出系統的行為，更是作為理論學家觀察、分析以增進理解的基礎。但與物理實驗數據不同的是，金融數據無法藉由設計的實驗創造出來。因為這樣的實驗無法與真實生活掛勾，設計不出來。即使能設計一個假想的實驗，參與人知道所有的交易都是假的，其行為必定與在真實市場中的交易不同。因此，所得的數據沒有價值。

與經濟學家、金融數學家的傳統研究不同的是，物理學家針對保存下來的大量的金融數據作「經驗分析」。他們主要是用統計力學的觀念與方法探究在數據中隱藏的統計性質，特別是普遍性的特徵。這是理解金融市場的第一步。當物理學家從「經驗分析」得到可觀的理解後，開始想像金融市場運作的模式而發明描述某一特定市場的數學模型。然後用此模型模擬該市場的運作以產生數據。再用「經驗分析」研究這些數據的統計性質，比較它們與真實數據反應的性質是否一致。從一致性的程度，作為修正模型的參考。更重要的是從一致性

符合之處可以幫助我們理解現象背後的原因與關聯。目前，物理學家大多以這種方法探討金融市場。我們略述一些有趣的結果。

【一】 有效市場模型的行為：價格是隨機變動的，所以無法預測。

所謂有效市場，是能把所有傳到市場的消息，馬上處理而反應成資產交易的新價格這樣的市場。真實市場通常不完全是有效市場，因此有套利(arbitrage)機會。市場上一直有人在尋找套利的機會。一旦找到，他們會重複使用，使得套利機會漸漸消失。一個沒有套利機會的市場就是有效市場。套利者的存在使得市場趨近有效市場。所以有效市場可以看成是真實市場的近似，也可以看成是一種理想化。

Samuelson 在 1965 年把有效市場的假設明確地表示成數學式子，並且在數學上證明適當地預測的價格是隨機變動的[2]。事實上，他用了合理行為與有效市場的假設，證明資產價格的時間序列是稱之為 martingale 的隨機過程。直觀地說，此種過程意味著：僅僅由資產價格變化的歷史記錄，無法使我們從這個資產的交易獲得利潤。或者說，市場的有效性使得交易變成一種公平的遊戲。因此可獲得下列結論：在有效市場中，從價格變化的歷史時間序列，我們是無法預測未來的價格變化的。

1960 年之後，有人作了大量的「經驗分析」以試驗真實市場是否滿足有效市場假設。絕大多數的分析結果顯示價格變化的時間相干是可忽略的小，所以支持有效市場假設。但是請注意，在 1980 年有人證明用出現在另外的時間序列(如利潤與價格的比值，股息利潤等序列)的信息，對某一資產的報酬率作長時間(如一個月)預測是可能的。

【二】 報酬的時間序列是隨機的，因此未來的值是不可預測的。

假設 $A(t)$ 為某一金融資產在時間 t 的價格，在時間 t 的報酬定義為 $R(t)=\left[A(t+\Delta t)-A(t)\right]/A(t)$，$\Delta t$ 為 $A(t)$ 的時間序列的時間間隔。若把 $R(t)$的時間序列編碼成 n 位的二元序列(如 $R(t)$的時間序列用二進位表示)其複雜度根據 ACT(算法的複雜性理論)為能印出該序列的最短計算機程式所佔記憶體的長度。利用 ACT，人們發現股票報酬的時間序列具有與隨機時間序列幾乎無法區別的統計特徵。ACT 無法偵測出一個帶有大量的不可壓縮的經濟信息的時間序列與一個純粹隨機過程之間的差別。總之，利用 ACT 的「經驗分析」告訴我們：金融的時間序列看起來是不可預測的，亦即未來的值在本質上是不可預測的。但是，此種性質並不意味著金融資產的價格的時間序列不反應任何有價值且重要的經濟訊息。用信息理論可以證明事實上是相反的，亦即價格的時間序列攜帶著大量的不可壓縮的信息。而預測的困難與信息的量大有關，並非缺乏信息。事實上，市場的有效性使所有可得的信息混在一起，而被編入時間序列中。若有一道信息會以特定的方式影響市場中的價格 (如 911 美國受攻擊事件使股價下跌) 則此市場不是完全有效的。我們可從價格的時間序列發現發現那道信息的存在。此時，套利的策略會被設計出來，直到市場又開始混合所有信息去形成價格為止，這時市場又恢復了有效性。

【三】金融序列中的時間相干(time correlation)

在金融數據中，一個常被考慮的隨機變數 $S(t)$ 是價格自然對數的改變量，即 $S(t)=\ln A(t+\Delta t)-\ln A(t)$，$A(t)$ 為某一資產在時間 t 的價格，Δt 為時間序列的時間間隔。一個隨機過程(如 $S(t)$)的自相干函數(autocorrelation function)定義為 $E\{S(t_1)S(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_1\ s_2\,\mathrm{P}(s_1\ s_2;t_1\ t_2)\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2$；$s_1, s_2$ 分別為隨機變數 $S(t_1)$ 與 $S(t_2)$ 之值，而 $\mathrm{P}(s_1\ s_2;t_1\ t_2)$ 為在 t_1, t_2 分別觀察到 s_1 與 s_2 之值的聯合機率密度。若 $S(t)$ 是靜止的(stationary)則自相干函數僅僅是時間間隔 $t_2-t_1\equiv\tau$ 的函數，即 $E\{S(t_1)S(t_2)\}\equiv C(\tau)$。

從許多金融數據的「經驗分析」，人們發現 $S(t)$ 的時間記憶都很短，大約不超過一天或只有幾分鐘。例如從可口可樂自 1989 年 7 月至 1995 年 10 月，每日的股價對應的 $S(t)$ 求出的自相干函數 $C(\tau)$ 發現其時間記憶不超過一個交易日。若把算出的 $C(\tau)$ 對 τ 作圖，可以看到 $C(\tau)$ 在一天之內從 1 降到 0，之後 $C(\tau)$ 之值在 0 上下做小幅度的振盪。同樣的數據，如果計算股價對數的譜密度 $S(f)$(即股價對數的時間序列的 Fourier 變換，f 為頻率)，可得 $S(f)\sim 1/f^2$。這個結果顯示股價指數也可以用隨機行走描述。為了偵測一個隨機過程是否長程相干，一個有效的方法是計算在時間窗口 t，價格變化量的標準差 $\sigma(t)$ 的行為通常可用冪定律描述，即 $\sigma(t)\sim t^{\nu}$。若價格變化量是隨機獨立的，$\nu=1/2$。對許多金融市場數據的分析，時間窗口從三十交易分鐘至一百個交易日，得到 $\nu\approx 0.5$。另外對紐約股價指數的日數據作分析，得到 $\nu\approx 0.52$；法蘭克福的 DAX 指數，$\nu\approx 0.53$；米蘭的 MIB 指數，$\nu\approx 0.57$。這些結果顯示弱的長程相干。較大的 ν 值可能表示該市場有效性較差。

有一個稱為波幅(Volatility)的隨機變數，常常定義為在一個適當的時間窗口中的價格變化量的標準差。波幅的統計性質很重要，因為他直接關聯在某一定特定時間到達市場的信息量。例如，如果有大量信息到達市場，那麼交易者就會因之活躍起來，而產生大量的交易，這種情況一般會造成大的波幅。從實用觀點來看，波幅是一個測度金融投資的風險的關鍵性參數。「經驗分析」顯示波幅的自相干函數滿足冪定律衰減，亦即波幅是長程相干的。例如 S&P500 指數的波幅的冪指數約為 0.3。如前所述，同樣這批數據顯示股票指數改變量的隨機變數幾乎是兩兩獨立的〈特徵衰減時間僅僅為四分鐘〉，然而其波幅卻呈現長程相干，沒有特徵時間尺度存在。所以這批 S&P500 的指數改變量的隨機變數並不是獨立的。若計算其譜密度，可得 $1/f^{\eta}$ 的行為，指數 η 約為 0.7。

【四】股票指數改變量的機率分布函數呈現非高斯的尺標性

R.N. Mantegna 與 H.E. Stanley 研究 1984 年 1 月至 1989 年十二月整整六年 S&P500 的指數的時間演變的統計性質[3]。數據是高頻率的，每隔一分鐘就有指數的紀錄。設 $A(t)$ 為在交易時間 t(t 的進行只紀錄交易時間，不是一般時間)的股票指數，$Z_{\Delta t}(t)\equiv A(t+\Delta t)-A(t)$ 為指數改變量，Δt 取為一分鐘。他們先計算 Z 的機率分布函數 $P(Z)$，得到下列結果。(1) $P(Z)$ 差不多是對稱的，(2) $P(Z)$ 呈現細瘦峰態(leptokurtic)，(3)在較小的 Z 值，$P(Z)$ 為非高斯形狀。若 Δt 從一分鐘改變到一千分鐘，則

$P(Z)$隨著Δt的增加而散佈出去，如同隨機過程的機率分布一樣。

為了研究$P(Z)$的特徵，Mantegna 與 Stanley 計算指數改變量 Z =0 的機率$P_{\Delta t}(Z=0)$與 Δt的函數關係。他們發現$\ln P_{\Delta t}(Z=0)$與$\ln \Delta t$ 之間呈現直線關係，亦即$P_{\Delta t}(Z=0)$作為Δt的函數，具有冪定律的尺標行為。得到的冪指數之值為- 0.712。已知平均值為零，而且對稱的穩定分佈可寫為

$$F_{\alpha\gamma}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha}\cos(qx)dq$$

其中α, γ為參數。當α介於 1 與 2 之間$F_{\alpha\gamma}(x)$稱為 Levy 分佈。$P_{\Delta t}(Z=0)$在Δt =1 分鐘恰與 α=1.4, γ=0.00375 的 Levy 分佈一致。但若比較 $P(Z)$與$F_{1.4,0.00375}(z)$則會發現它們的尾巴部分明顯不同。$P(Z)$在尾巴部分的值小於$F_{1.4,0.00375}(z)$對應的值。這個性質使得 $P(Z)$的方差是有限大的，不像 Levy 分布有無限大的方差。

【五】隨機的多經理人模型

如前所述，大量的「經驗分析」發現金融價格呈現某些普遍的特徵，很像有極多小單元相互作用的物理系統所表現的尺標律(scaling law) 一樣。因此我們會問：金融中的尺標現象是不是也像物理系統一樣由許許多多市場參與者相互作用造成的。但是這種現想法卻與有效市場假設違背。因為這個假設認為價格改變量中的的尺標性僅僅是反應傳入市場而影響價格的信息中的尺標而已。這些信息是關於相關的資產未來賺取利潤的遠景。Thomas Lux 與 Michele Marchesi 為了解決這個問題設計了一個隨機的多經理人模型[4]。在此模型中，所有的交易者被分成兩群，一群遵循有效市場假設，認為資產的價格是由其基本值決定的。所謂基本值是資產未來被期待的利潤折成現在的值所造成的該資產的價值。這一群人稱為基本派(fundamentalist)。另一群人不相信價格有立即恢復為基本值得傾向，他們認為價格是由價格的傾向、價格的發展圖樣以及其他交易者的行為所決定的。他們由〝技術面〞來判斷價格的變化。由於他們考慮別人的行為以致常常會造成群聚(herding)現象。這一群人稱為「哄傳交易者」(noise trader)。哄傳交易者又分為樂觀派與悲觀派。在這模型中，有趣的動態行為是由個別交易者在不同群之間變換角色促成的。角色變換是由基本值改變的外在原因及交易者市場操作的內在原因一起造成的。此模型明確地定義角色切換的機率，這個機率隨著時間作改變。角色變換、價格改變以及基本值改變所假設的細節在此略去，讀者可參考資料[4]。現在只報告他們做電腦模擬的結果。(1)價格非常近似的跟蹤基本值發展的軌跡。可是對應於價格與基本值的自然對數改變量$S(t)$與$S_f(t)$在時間軸上的分佈卻很不相同，即$S(t)$與$S_f(t)$二者之增量的統計性質有基本上的差異。$S(t)$的時間序列呈現較高頻率的極值事件(即$S(t)$出現較大與較小值的次數遠較$S_f(t)$為多)而且有波幅集群現象(亦即波幅大的地方會群集成一團一團的)。(2) $S(t)=\ln A(t+\Delta t)-\ln A(t)\equiv S_{\Delta t}(t)$，$S_f(t)=\ln A_f(t+\Delta t)-\ln A_f(t)\equiv S_{f\Delta t}(t)$，$A(t)$與$A_f(t)$分別為價格與基本值。分別對$\Delta t=1,5,15,25$；$S_{\Delta t}(t)$與$S_{f\Delta t}(t)$的累加分佈函數作對數相對於對數的圖形發現後者不管 Δt 之值為何均落在同一條指數衰減的曲線上，而前者則呈現四條不同的曲線，$\Delta t=1$，在$S_{\Delta t}$大時呈現冪定律衰減，其衰減指數為 2.64；Δt變大時，$S_{\Delta t}$的分佈函數從

冪定律衰減逐漸過渡到指數衰減。令人驚奇的是在真實的以日為頻率的金融數據中，發現 2.64 的指數以及從冪定律衰減過渡到指數衰減的現象。(3) 他們分別計算 $S_f(t)$ 及 $S(t)$ 對於不同時間窗口 T 的標準差 $\sigma_f(T)$ 與 $\sigma(T)$。結果是 $\sigma_f(T)$ 與 $\sigma(T)$ 均符合冪定律，即 $\sigma_f(T) \sim T^{\nu_f}$，$\sigma(T) \sim T^{\nu}$，估算得到 $\nu_f = 0.49$，$\nu = 0.48$，這個結果表示 $S_f(t)$ 與 $S(t)$ 的時間序列沒有長時間記憶。與真實金融數據的結果一致。但是若定義波幅為 $|S(t)|$，則發現對應的標準差隨時間窗口變化的指數為 0.85，顯示波幅具有長程相干。這個結果又與金融數據中對應的結果非常接近。

因為以上用電腦模擬價格得到的尺標性質在模型定義的外界驅動力中並不存在，可以斷言這些性質是由經理人的交互作用產生的。這些經理人在模擬市場中有不同的信念及策略。Lux 與 Marchesi 作更進一步的分析發現在高波幅時期，有較大比例的「哄傳交易者」存在。更具體地說，當市場中「哄傳交易者」的比例靠近或超過一個臨界值，波幅會超過平均值。而這種高波幅的混亂情況很快地會被市場內在的機制克服：「基本派」的交易者會利用高波幅來套利而使得市場穩定下來。

以上所述，只是物理在金融現象上的探討中的一小部份結果。然而，這些成果的確增進我們對金融市場這樣的複雜系統的理解。生命是「自然」的產物，生命現象是自然現象，由人所發展出來的金融市場行為，應該可以說是更高層次的自然現象吧！除了好奇，物理學家似乎也有責任去探究這種自然現象。雖然金融系統的「味道」與傳統的物理系統那麼不同，但是基於物理學家過去的豐功偉業，我相信他們在這方面也會有驚人的突破性貢獻。

參考文獻

［1］R. N. Mantegna and E. Stanley, An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance (Cambridge University Press, Cambridge, England 1999)

［2］P. A. Sammelson, Industrial Management Rev. **6**, 41-45 (1965).

［3］R. N. Mantegna and E. Stanley, Nature (London) **376**, 46 (1995).

［4］T. Lux and M. Marchesi, Nature(London) **397**, 498 (1999).