物理奧林匹亞競賽試題與解答

國立台灣師範大學物理系
林明瑞
e-mail: mjlin@phy.ntnu.edu.tw

國際物理奧林匹亞競賽（International Physics Olympiad，簡稱 IPhO）是專為全世界優秀中學生所舉辦的國際競賽，自 1967 年創辦以來，至今已舉辦了 32 屆，參賽國家約近七十國，遍及五大洲，成為一年一度的世界性大賽。競賽分成理論和實驗兩場，各考五小時，內容涵蓋普通物理學的全部，試題難度接近博士資格考試的程度（但所用的數學不能超出微積分）。主辦國由參賽國家輪流擔任，負責命題和閱卷的全部試務工作。參賽對象以國家為單位，每一國僅能派出由五名中學生所組成的國家代表隊。

我國在 1994 年首次選拔學生組隊參賽，至今已連續參加八屆的競賽。國家代表隊的選拔程序分初選、複選、和決選三個階段，有關選拔的命題、試務、和訓練全部由選訓工作委員會負責。該委員會由來自四所大學（台灣師大、台灣大學、清華大學、和交通大學）的十六位物理教授組成。多年來，教授們群智群力所匯集成的試題，不論是品質和數量方面皆相當可觀，堪稱是學習物理的智慧寶庫。這些題目結合理論和實際，是鍛鍊分析思考能力的絕佳題材，是國內大學物理教授們為提升物理教育品質所做的集體貢獻。本刊徵得物理奧林匹亞選訓委員會的同意，每期精選若干試題和解答，以饗讀者。

一、把一支兩端開口的毛細管垂直地接觸液體的表面，則液體將被吸入管中，這就是我們所熟悉的毛細現象。本題將從動力學觀點來分析管中液柱的運動問題。設毛細管的內半徑為 r，液體的表面張力為 Γ，密度為 ρ，黏滯係數為 η，並使毛細管的內壁預先充分潤濕，可使管內液柱的表面（為一弧面）和管壁的接觸角為零，即表面張力的作用方向垂直向上。

(a)當管內液柱達成平衡狀態時，則管內的液柱高度 h_o 為何？

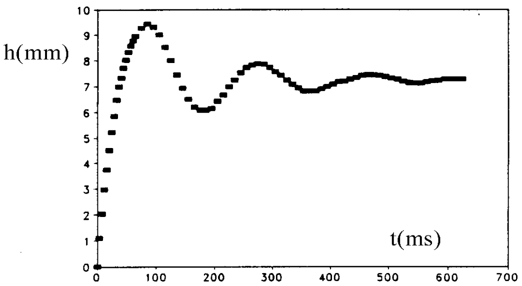
(b)設毛細管和液面剛接觸時的時刻為 $t = 0$，在時刻 t 時管內液柱的高度為 h。若管內液柱所受的黏滯力可寫為 $8\pi\eta hv$，式中 v 為液柱上升或下降的速度，寫出液柱的運動方程式。

(c)試證當毛細管內的液面初始上升時，其上升的高度 h 和時間 t 成正比。

(d)假定液體的黏滯力很小（例如酒精），可以忽略不計，求出液柱高度 h 和時間 t 之間的關係式。毛細管內的液柱剛開始上升的速度為何？能上升的最大高度為何？液柱上升至最高點須經歷多少時間？

(e)利用高速攝影機（每 5ms 拍攝一個影像）可拍攝毛細管內液柱的運動過程，圖一為所

測得的 h-t 關係曲線（液體為酒精，$\Gamma = 16.6\times10^{-3} N/m$，$\rho = 710 kg/m^3$，$\eta = 3\times10^{-4} Pa\cdot s$；毛細管的內半徑為 $r = 689\mu m$）。試應用(d)題的理論結果來解釋此實驗曲線（比較(d)題中所問的三個物理量的理論值和實驗值，以及定性解釋 h-t 關係曲線的形狀）。



圖一

【註】你也許需要用到下列的數學式：

(1) $$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = a + bx$$
$$\Rightarrow \left(x\frac{dx}{dt}\right)^2 = ax^2 + \frac{2}{3}bx^3 + \text{常數}$$

(2) $$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + \text{常數}$$

解：

(a)作用於液柱的毛細作用力為 $F = 2\pi r\Gamma$，此力用於支持液柱的重量 $Mg = (\pi r^2 h_0 \rho)g$，所以

$$2\pi r\Gamma = (\pi r^2 h_0 \rho)g \quad \Rightarrow h_0 = \frac{2\Gamma}{\rho g r}$$

(b) 在 t 時刻時的液柱動量為 $mv = (\pi r^2 h\rho)\frac{dh}{dt}$，故其運動方程式為

$$\frac{d}{dt}(mv) = F_{\text{毛細作用力}} - mg - F_{\text{黏滯力}}$$
$$= 2\pi r\Gamma - (\pi r^2 h\rho)g - 8\pi\eta h\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \ (\pi r^2\rho)\frac{d}{dt}\left(h\frac{dh}{dt}\right)$$
$$= (\pi r^2\rho g)\left[\frac{2\Gamma}{\rho g r} - h - \left(\frac{8\eta}{\rho g r^2}\right)h\frac{dh}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(h\frac{dh}{dt}\right) = g\left[\frac{2\Gamma}{\rho g r} - h - \left(\frac{8\eta}{\rho g r^2}\right)h\frac{dh}{dt}\right]$$
$$= g\left[h_0 - h\left(1 + \frac{8\eta}{\rho g r^2}\frac{dh}{dt}\right)\right]$$

(c)當毛細管內的液面初始上升時，由於液柱極短，即 h 幾乎為零，其運動方程式可寫為

$$\frac{d}{dt}\left(h\frac{dh}{dt}\right) \approx gh_0 \quad \Rightarrow \quad h\frac{dh}{dt} \approx gh_0 t + C$$

因為當 t = 0 時，h = 0，所以 C = 0。以之代入上式，再積分一次可得

$h = \sqrt{gh_0}\, t$，即 h 和 t 成正比。

由上式可得管內液柱上升的初速為 $v_0 = \sqrt{gh_0} = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\rho r}}$。

(d)若液體的黏滯力可以忽略不計，則液柱的運動方程式為

$$\frac{d}{dt}\left(h\frac{dh}{dt}\right) = g(h_0 - h)$$
$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(\frac{dh^2}{dt}\right) = 2g(h_0 - h)$$

設 $z = h^2$，則上式可寫為

$$\frac{d}{dt}(\dot{z}) = 2g\left(h_0 - \sqrt{z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}\frac{d}{dt}(\dot{z}) = \dot{z}\left[2g\left(h_0 - \sqrt{z}\right)\right]$$
$$= \left[2g\left(h_0 - \sqrt{z}\right)\right]\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{z}^2\right) = 2g\frac{d}{dt}\left(h_0 z - \frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}^2 = 4g\left(h_0 z - \frac{2}{3}z^{3/2}\right) + A$$

式中 A 為積分常數。因為 $z = h^2$，故 $\dot{z} = 2h\frac{dh}{dt}$，代入上式可得

$$4h^2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 4g\left(h_0 h^2 - \frac{2}{3}h^3\right) + A$$

當 t = 0 時，h = 0，所以 A = 0，得

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{g\left(h_0 - \frac{2}{3}h\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h_0 - \frac{2}{3}h}} = \int_0^t \sqrt{g}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{gh_0}\left(t - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{h_0}}t^2\right)$$
$$= \frac{3}{2}h_0 - \frac{\sqrt{g}}{6}\left(t - 3\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)^2$$

由上式可知：毛細管內液柱上升的初速為 $\sqrt{gh_0}$，能上升的最大高度為 $1.5h_0$，所經歷的時間為 $3\sqrt{h_0/g}$。

(e)將題給的數據代入上題所解得的理論公式，可得下列各量的理論值：

平衡時的液柱高度

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\times 16.6\times 10^{-3}}{710\times 9.80\times 689\times 10^{-6}}} = 6.92mm \text{；}$$

最大的液柱高度

$$h_{max} = 1.5h_0 = 10.4mm \text{；}$$

液柱上升至最高點所經歷的時間

$$\tau = 3\sqrt{6.92\times 10^{-3}/9.80} = 79.7ms \text{。}$$

由數據圖中的 h-t 曲線，可讀出上述各量的實驗值：

$(h_0)_{exp} = (7.1 \pm 0.1)mm$，

$(h_{max})_{exp} = (9.7 \pm 0.1)mm = 1.4h_0$，

$(\tau)_{exp} = (85 \pm 5)ms$。

各量的理論值和實驗值相當吻合。h_{max} 的實驗值較理論值稍低 $(\tau)_{exp}$ 則比理論值稍大，這是由於液體黏滯力的影響。如果沒有黏滯力，則液柱將會上下振動，其 h-t 的關係曲線為一週期為 6 τ 的拋物線，其最大高度為 $1.5h_o$。但在實際狀況時，由於黏滯力對液柱的阻尼作用，液柱的振盪幅度將逐漸減弱，最後的平衡高度為 h_o。

二、已知絕對溫度為 T 的物體，其單位表面積在單位時間內所輻射出的能量（即輻射強度 I）遵循下列關係式

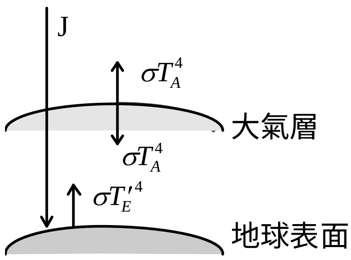
$$I = \sigma\varepsilon T^4$$

式中 $\sigma = 5.67\times 10^{-8} W/m^2 \cdot k^4$ $0 < \varepsilon \le 1$。若為理想輻射體 $\varepsilon = 1$，一般物體則 $\varepsilon < 1$。已知太陽的表面溫度 $T = 6000^\circ K$，地球與太陽間的距離為 $1.495\times 10^{11}m$，太陽半徑為 $6.96\times 10^8 m$，地球半徑 $R_E = 6.37\times 10^6 m$。

(1)假設太陽和地球本體皆為理想的輻射體，且經測量得知太陽射向地球的輻射能量中僅有 70%能抵達地球，試依此估算地球外層的溫度 T。

(2)由於地球表面有一大氣層存在的關係, 實際上地球表面的溫度會比上面計算的稍高(上題計算的溫度約為大氣層外圍的溫度)。假設大氣層會全部吸收由地球表面所輻射的能量,但來自太陽的輻射能量則可完全通過大氣層而被地球表面吸收,試依此估算地球表面的溫度。

(3)由於大氣層並無法完全吸收由地球表面輻射出來的能量,假設有 22%的能量會穿透大氣層,試再估算地球表面的溫度。



圖七

(4)1980 年代初期,有一組科學家曾警告,若是爆發核子戰爭,則將會在大氣層外形成另一層〝吸收雲層〞,該雲層會完全吸收來自太陽的輻射能,卻又讓地球(大氣層及地表)輻射出來的能量完全透過而發散到外太空去, 因而造成〝核子冬季〞的來臨,試估算此〝核子冬季〞的溫度。

解:

(1)太陽射向地球的輻射能量, 如果過程中沒有任何吸收,則地球表面上每單位面積每單位時間所接收到的輻射能量為

$$J=\frac{4\pi R_S^2}{4\pi R_{S-E}^2}\cdot\sigma T_S^4=\left(\frac{R_S}{R_{S-E}}\right)^2\cdot\sigma T_S^4=1590W/m^2 \quad \text{…………..(1)}$$

按題設太陽的輻射能量僅有 70%抵達地球,所以地球每單位時間內實際所接收到的能量為

$$\dot{Q}_1=\pi R_E^2\times J\times 0.70 \quad \text{……….(2)}$$

地球本身每單位時間內所輻射出去的能量為

$$\dot{Q}_2=4\pi R_E^2\times\sigma T_E^4 \quad \text{……….(3)}$$

當 $\dot{Q}_1=\dot{Q}_2$ 時,則地球達到熱平衡的溫度,即

$$4\pi R_E^2\times\sigma T_E^4=\pi R_E^2\times J\times 0.70$$

$$\Rightarrow T_E=\left(\frac{0.70J}{4\sigma}\right)^{1/4}=\left(\frac{0.70\times1590}{4\times5.67\times10^{-8}}\right)^{1/4}$$

$$=265K(\text{或}-8^\circ C)$$

(2)設地球表面的溫度為 T_E',大氣層的溫度為 T_A,則地球每單位時間內實際所接收到的太陽輻射能量為 $\dot{Q}_1$,即(2)式。

地球本身每單位時間內所輻射出去的能量為

$$\dot{Q}_2'=4\pi R_E^2\times\sigma T_E'^4$$

地球接受來自大氣層反射而回的輻射能量為

$$\dot{Q}_3=4\pi R_E^2\times\sigma T_A^4$$

當 $\dot{Q}_1+\dot{Q}_3=\dot{Q}_2'$ 時,地球達到熱平衡的溫度,即

$$\pi R_E^2\times J\times0.70+4\pi R_E^2\times\sigma T_A^4=4\pi R_E^2\times\sigma T_E'^4 \quad \text{……………..(4)}$$

單就大氣層而言,

大氣層每單位時間內所吸收來自地球的輻射能量為

$$\dot{Q}_4=4\pi R_E^2\times\sigma T_E'^4$$

大氣層本身每單位時間內所輻射出去的能量為

$$\dot{Q}_5 = 2\times\left(4\pi R_E^2 \times \sigma T_A^4\right)$$

當 $\dot{Q}_4 = \dot{Q}_5$ 時，大氣層達到熱平衡的溫度，即

$$4\pi R_E^2 \times \sigma T_E'^4 = 2\times\left(4\pi R_E^4 \times \sigma T_A^4\right) \ldots\ldots\ldots(5)$$

解(4)和(5)，可得

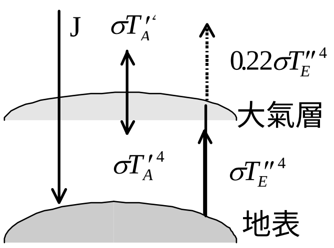
$$T_E' = \left(\frac{0.70\times J}{2\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{0.70\times 1590}{2\times 5.67\times 10^{-8}}\right)^{1/4}$$

$$= 315K\left(\text{或}42^\circ C\right)$$

(3) 參看圖八，設 T_E'' =地球表面的溫度，T_A' = 大氣層的溫度，則(4)和(5)兩式可改寫如下：

$$\pi R_E^2 \times J \times 0.70 + 4\pi R_E^2 \times \sigma T_A'^4 = 4\pi R_E^2 \times \sigma T_E''^4 \quad \ldots..(6)$$

$$4\pi R_E^2 \times \sigma T_E''^4 \times (1-0.22) = 2\times\left(4\pi R_E^4 \times \sigma T_A'^4\right) \quad \ldots\ldots(7)$$



圖八

解(6)和(7)，可得

$$T_E' = \left(\frac{0.70\times J}{(4-2\times 0.78)\sigma}\right)^{1/4}$$

$$= \left(\frac{0.70\times 1590}{2.44\times 5.67\times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 299K\left(\text{或}26^\circ C\right)$$

(4)參看圖九，T_N 為地球在「核子冬季」時的溫度，T_B 為吸收雲層的溫度。

就地球而言，

$$4\pi R_E^2 \times \sigma T_N^4 = 4\pi R_E^2 \times \sigma T_B^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\Rightarrow T_N = T_B$$

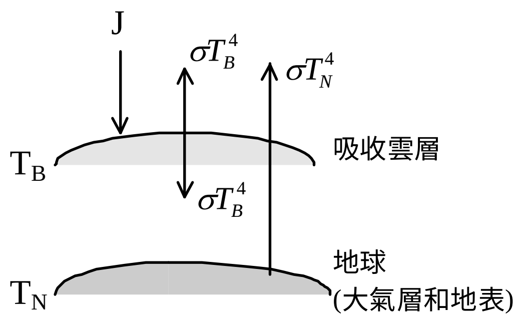
就吸收雲層而言，

$$\pi R_E^2 \times 0.70 \times J = 2\times\left(4\pi R_E^2 \times \sigma T_B^4\right)$$

$$\Rightarrow T_B = \left(\frac{0.70\times J}{8\sigma}\right)^{1/4} \quad \ldots\ldots(9)$$

由(8)和(9)可得

$$T_N = \left(\frac{0.70\times 1590}{8\times 5.67\times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 223K\left(\text{或}-50^\circ C\right)$$



圖九