

漫談繩結的一些物理與歷史

黎璧賢

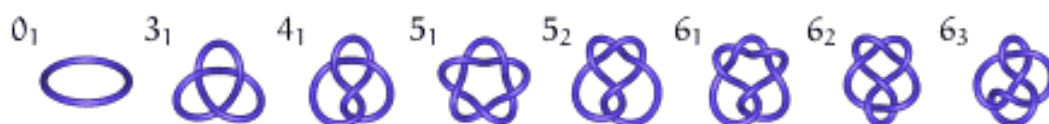
國立中央大學物理系及複雜系統中心

e-mail: pylai@fermi.phy.ncu.edu.tw

■ 楔子

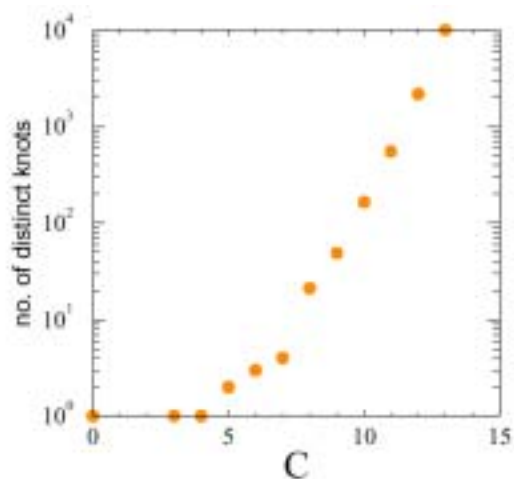
很多人都會試過去解開一絞糾纏不清的打結繩團的經驗，而繩團的結越多將需要更多的時間與耐心去解開它。隨機或粗暴的動作往往會使事情更

糟，耐心不足的最後會放棄或拿起剪刀。結在我們的日常生活中隨處可見，如打領帶用繩索縛東西等等。有人說結很像夜空中的星星，它們都有無窮的數目，也同樣的美麗和令人著迷（如圖一）。



圖一

數學上對結(Knot)有比較嚴謹的定義，結是一條在三維中的閉合曲段，在空間中可有不同的交錯纏擾而構成拓撲不同的結（圖一）。對兩個拓撲不同的結，無論如何去解或作連續變化(不可剪斷)，將無法把其中一個結變成另一個。反之，如果在有限步之 Reidemeister Moves 內可將一個結化成另一個，則此二結實為同一種結。在數學上對拓撲不同的結作分類是個有趣的未解問題。對拓撲不同的結最基本的命名是 C_k （見圖一），其中 C 是有效交錯數(essential crossings)，是結投影在平面上之最少交錯數(整數)，而 k 則標示拓撲不同的結。 C 是一個拓撲不變量，兩個有不同 C 值的結必是拓撲不相同。



圖二

但用來辨別拓撲不同的結， C 卻不是一個很好的拓撲不變量，因對複雜的結 C 有很高的簡併度。如圖一所示， $C=5$ 時有兩種不同的結， $C=6$ 時有三個。目前已找出所有少於 $C=14$ 的結，結的數目和 C 的

關係如圖二所示,對複雜的結(C 值大)其簡併度隨 C 作指數增長。近代發現的拓撲不變量,如亞歷山大(Alexander)鍾斯, (Jones)多項式及 Vassiliev 不變量等,能較為有效辨認不同的結,但對複雜的結,仍未有一個拓撲不變量是和拓撲不同的結有一一對應的關係。

■ 繩結在人類文明的歷史

從考古學研究顯示,人類在遠古時期已懂得使用繩結,這可從洞穴人其遺留下來的帶孔的石製工具間接得知。如在周口店洞穴中發現用骨製的針和有穿孔的貝殼(後舊石器時期,約在一萬八千年前)。及後在各處古人類文明歷史中都有繩結使用的記載。如在中國的古書<周易>就明確記有『上古結繩而治』,<莊子>中亦有提及遠古時代人物如神農,伏羲,軒轅黃帝等使用繩結來記事。漢朝的<易註>也記有上古時結繩以記事,大事以大結記之,小事則用小結。遠在符號和文字發明前,古人類已利用繩結作記錄工具,數字亦利用多個繩結的組合來表示和計算。如圖三之古中國繩結表示完結之意。此外,南美州的印加(Inca)古文明(公元前 1400-1560 年)就利用繩結來建立一套算數及記數的系統籍以作稅務及交易的運算。結之所以被用作記憶的工具,除了材料方便之外,很重要的原因是繩段間不能相互穿透交錯,這種強大的拓撲相互作用有記憶能力:拓撲不同的結永不一樣,除非把繩剪斷和黏合。



圖三

■ 在科學領域中出現的結

雖然繩結在人類生活中有久遠之歷史,但以科學方法去描述或探討結(knot)的性質卻是近二百多年的事情。最早有數學的記載是高斯在 1794 年其電磁學理論研究中有關磁力線穿透兩個環狀導線中的電感(inductance),他寫下了環繞數(Linking number)的公式,在現今之結理論概念中仍是個基本工具。高斯遺留下來的草稿畫有不少結的圖示和筆記,清楚顯示他認為結的研究在數學上是一個重要的問題。雖然高斯在結或拓撲學上的研究不多,但受他影響的學生對結理論卻有很大的貢獻。高斯的學生 Listing 以投映平面圖來表示結,亦嘗試建立拓撲不變量。後來英國數學家 Tait 等人花了多年時間有系統的找出少於 $C=10$ 的結及其圖示。到 1900 年時,結的圖表已幾達 $C=11$,但要辨別拓撲不同的結,一個有效的不變量是很重要的。Alexander 於 1928 發現建立多項式作為結的拓撲不變量,亞歷山大多項式在結理論及結的完全圖表一直是很有用的工具。及後 Reidemeister 發現可把對結的所有拓撲不變動作皆可化為連串的三種 Reidemeister moves (1932),都對結理論以及後來物理中的 Yang-Baxter 方程有很大影響。70 年代著名數學家 Conway 亦對

結理論有重要貢獻。重大突破發生於 1983 年當鍾斯發現了他的 Jones polynomial, 及後結理論有爆炸性的發展, 亦與統計物理及量子群論有非常密切的關係。

其實把結和物理連在一起的想法早在百多年前已出現, Lord Kelvin(William Thomson)在 1860 年代提出不同原子元素是拓撲不同的質數結, 存在以太(ether)之中, 而元素的穩定性是因為結的強拓撲限制令其維持同一種結。原子在極高能量下可變為另一元素被解釋成結被高能量剪開後再重新形成另一種結。當然這是個錯誤的理論。直至近十數年, 因為鍾斯多項式的突破, 結和物理又有緊密的連係, 主要是在統計力學中晶格模型可解系統及 Yang-Baxter 方程跟結有關。此外, Witten 在 1988 年亦發現鍾斯多項式亦很自然的出現在 2+1 維的拓撲量子場論中; 穩定的結解在三維經典場論中的 Skyrme 模型出現; 一些非線性動力系統在相空間或實空間出現有結的週期或極限環行為。上述的物理領域相關例子都是抽象和數學化, 跟直觀的物理相去較遠。另一方面, 在生物、化學、物理及數學不同科學領域中亦有一些科學家對結本身的物理性質有興趣。例如: 自然界有出現帶結的環 DNA 份子, 特別的拓撲 (topoisomerase) 可令 DNA 的拓撲結構改變; 化學上可以人工合成的結份子, 而成份相同但拓撲不同的份子可以有不同的化學性質; 結對宏觀繩索張力及拉斷的影響; 以至可利用光鉗攝抓 DNA 或 actin 份子來打結等等。

■ 繩結中的分類與拓撲作用

我對結感到有興趣的是它所包含的拓撲相互作用, 就是繩段之間不可穿透而糾纏在一起的效應

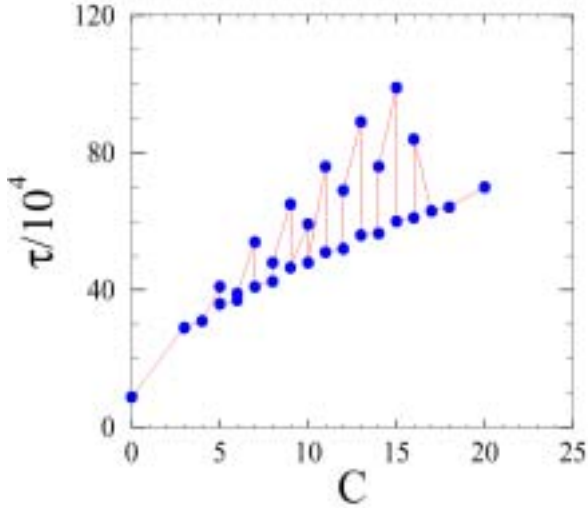
(entanglement effects)。這作用很容易理解, 但不易有正確的量化描述。拓撲相互作用在高份子系統尤為重要, 它主宰系統的動力行為, 亦影響高份子的整體結構。但如何有系統的來探測結的拓撲相互作用? 古語有云: “解鈴還需繫鈴人”, 以此作逆向思考, 則如欲瞭解結之性質, 可嘗試去解開之。把結用高份子的模型來處理, 可以方便地進行電腦模擬及測量其結構和動力學等物理性質。在份子微觀尺度下可利用熱擾動(布朗運動)去把一個有一處剪斷的結來解開。圖四上方乃一個 $C=20$ 的結在熱平衡下的形態, 在 $t=0$ 時隨機地在一處把高份子剪斷, 然後測量繩段完全解開所需之平均時間。圖四下方乃此剪斷之結經過很久之後完全解開的形態。



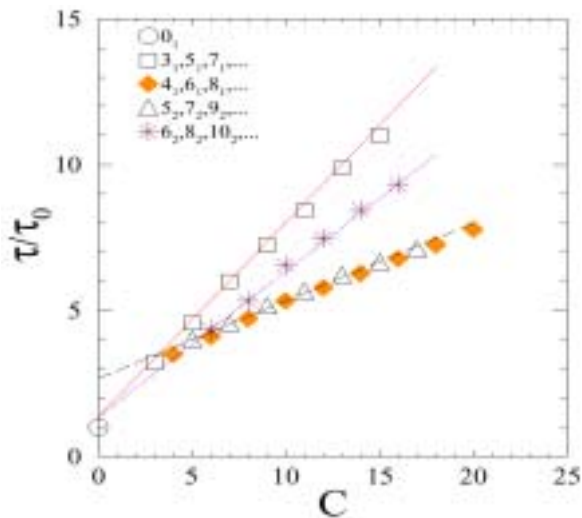
圖四

一般簡單的想法是如果結的 C 值越大, 必然需要更長的時間(τ)去完全解開, 但結果出乎意外, 顯示有些 C 值較小的結比更複雜的結(C 值較大)需要更長的時間去完全解開。如圖五所示 71 結比 81,82,92,101,112,121 等結要更久才解開, 而解開時間與 C 是非單調增加。這表示結的詳細拓撲結構很重要。但如果把這些結作適當的分類, 則可發現所有這些質數結(prime knots)的平均解開時間在同一組群內有隨 C 作直線增加的有趣行為。如圖六所

示，一些組群有較長的 τ ，意味這些組群的結有較強的拓撲相互作用。



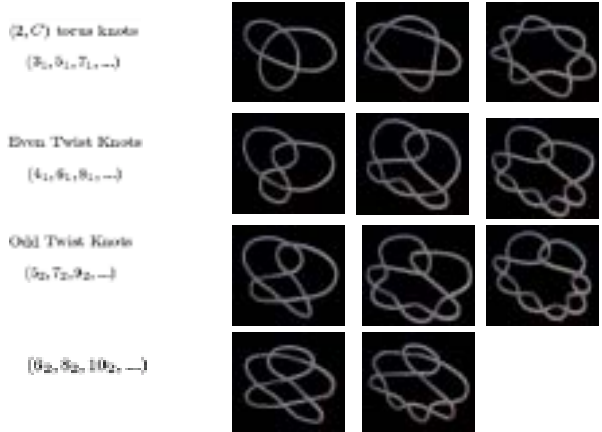
圖五



圖六

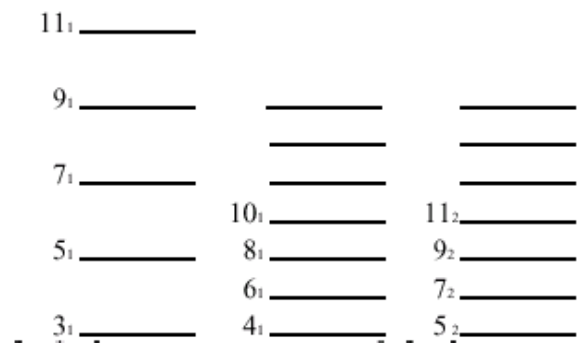
圖七是部份組群的結圖，組群內之結每成員的 C 值增加二。可以想像拓撲不同的結帶有不同的拓撲自由能，在把結剪斷後，拓撲自由能平均在時間 τ 內耗散至線性高份子之狀態。由 τ 與 C 在同一組群的性關係，可推測結的拓撲自由能譜亦分組為等距之能譜。這對拓撲自由能有比較定量的了解。如圖

八示意之拓撲自由能譜，可以想像拓撲在環狀 DNA 中提供一單位「拓撲子」(topolon)能量而使環狀 DNA 增加兩個交結。

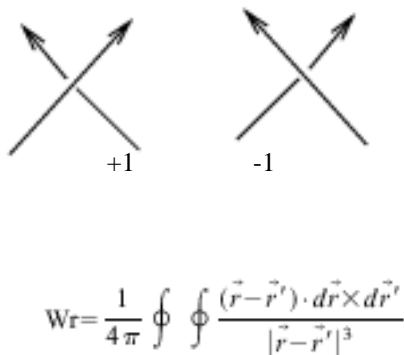


圖七

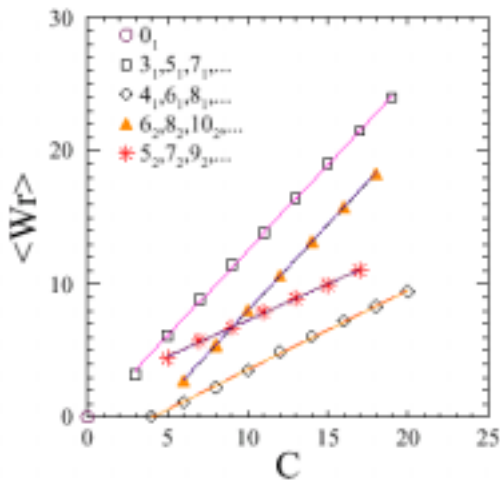
在另一方面，對未有剪斷質數結的 Writhe 數的統計平均量 $\langle Wr \rangle$ 亦發現存有類似的分組及隨 C 作量子化增加的行為。Writhe 數是一幾何量，基本上是把線段投映交叉依其方位定為+1 或-1(見圖九)，然後全部相加。平均量 $\langle Wr \rangle$ 是再從不同角度投映後的平均，對手征不變(chiral symmetric)的結， $\langle Wr \rangle$ 為零。圖九為 $\langle Wr \rangle$ 從電腦模擬得到的結果，顯示有同樣的組群及線性行為。



圖八



圖九



■ 結語

繩結中拓撲作用仍有很多未清楚之處，利用統計物理和高份子物理的研究方法有希望對此可以有深入的認識，從而對各領域如拓撲學、生物鏈狀份子、理論物理模型之基本拓撲相互作用及現象有所了解。亦可設計一些實驗去探討結的物理性質，如可放置一帶結之金屬鏈於振動台上(見圖十)，以探討結之統計平均性質，例如上述之平均解結時間等



圖十

參考資料:

- *History and Science of Knots*, Series on Knots and Everything vol. 11, edited by J.C. Turner and P. van de Griend (World Scientific 1996)
- C.C. Adams, *The Knot Book* (Freeman, NY 1994)
- *Knot and Physics*, Series on Knots and Everything vol. 1, edited by L.H. Kauffman (World Scientific 1993)
- F.Y. Wu, *Rev. Mod. Phys.* 64, 1099 (1992)
- Y.J. Sheng, P-Y. Lai, and H.K. Tsao, *Phys. Rev. E* 58, R1222 (1998); 61, 2895 (2000)
- J.Y. Huang and P-Y. Lai, *Phys. Rev. E* 63, 021506 (2001)
- P-Y. Lai, Y.J. Sheng and H.K. Tsao, *Phys. Rev. Lett.* 87, 175503 (2001)
- P-Y. Lai, *Chin. J. Phys.* 40, 107 (2002)