

自組臨界性與沙堆模型之普適性

林財鈺¹ 胡進錕²

中央研究院物理研究所

¹e-mail: lincy@phys.sinica.edu.tw

²e-mail: huck@phys.sinica.edu.tw

摘要

傳統臨界系統的研究發現臨界現象具有普適性，即臨界行為與系統的微觀細節(如同一空間維度之晶格種類、二元流體之分子種類等)無關。米粒堆之崩落實驗[Nature, 379, 49 (1996)] 卻顯示某些自組臨界現象與系統之微觀細節(如米粒之長寬比)有關。Bak、Tang 和 Wisenfeld (BTW) 提出之沙堆模型可以顯現自組臨界性。本文簡單介紹我們研究 BTW 沙堆模型在正方形、三角型、蜂巢型和隨機晶格中的臨界行為。我們發現 BTW 模型在這四種晶格有相同的臨界指數，即普適性依然成立。

1. 簡介：

幕次定律(power law)是近代臨界現象^[1]理論或實驗研究的主題。經由幕次定律的刻劃，在臨界點附近，系統的一些物理量的變化可以由臨界指數來表示。通常在實驗室內，系統為了達到臨界點，參數必須調到非常精準，以便產生幕次行為。但在實驗室外，少有人能調整系統參數，使得剛好能觀察到幕次行為。所以一般人應該是幾乎發覺不到臨界現象的存在。但觀察整個我們所處的世界，從地震^[2]，分形幾何^[3]到 1/f 噪聲^[4]，處處又都存在著各種形式的幕次定律。為了解釋這些複雜現象，Bak, Tang 和 Weisenfeld (BTW)^[4]在 1987 年提出自組臨界性(self-organized criticality)

的概念。在這機制下，不經由參數的調整，系統會自動地抵達臨界態，而有幕次行為。而這種概念也相當程度地解釋了大自然中一些看來相當複雜且存在的結構。

自組臨界現象中最有名的一個例子，是沙堆演化^[5]。考慮一堆平整的沙粒系統，將外界的沙粒一顆一顆地緩緩加入沙堆系統中。剛開始時，沙堆處於平衡態，這個微小的擾動，只會使沙堆愈來愈高而不會有沙粒崩落的現象，等到沙堆變得愈來愈陡時，再加上一顆沙子，有可能使部份沙粒會有崩落現象，且每次崩落沙粒數有大有小，使得沙堆外貌出現改變。由臨界現象理論中得知，在臨界點時相干長度(correlation length)無限大，系統一個點的改變將影響到系統中任何其他的點，但在遠離臨

界點時，局部性的改變，並不會影響全體系統。以沙堆來說，加入沙粒，應只影響沙粒掉落處附近的組態。但據我們的觀察，卻發現有時會有大數目沙粒崩落，即一顆沙粒影響了整個系統，因此我們可以假設，不斷地加入沙粒會驅使沙堆進入臨界態，因此沙堆有可能是一個自組臨界系統。

BTW 藉由觀察沙堆，做了若干簡化之後，提出了有名的 BTW 沙堆晶格模型 (BTW sandpile model)^[4,6]。茲考慮一個有 N 個晶格點的晶格 R ，在 BTW 模型每一個晶格點 i ($1 \leq i \leq N$) 上有一個整數 Z_i ，此整數可代表此晶格點與鄰近點的高度差。對每一點晶格點 i 來說，它有 Z_i^C 個相鄰點。如果加一顆沙落到晶格點 i ，此時 $Z_i = Z_i + 1$ ，若新的 Z_i 大於或等於其相鄰晶格點數，即 $Z_i \geq Z_i^C$ ，此晶格點將變為不穩定而崩落 $Z_i - Z_i^C$ 顆沙粒 ($Z_i - Z_i^C$)。而那 $Z_i - Z_i^C$ 個沙粒被傳送到 Z_i^C 個相連的鄰近點。此時每一個鄰近點 k 將接收到一顆沙粒 ($Z_k = Z_k + 1$)。對 k 點來說，新的 Z_k 如果滿足 $Z_k \geq Z_k^C$ ， k 點也會傳送沙粒到它的鄰近點，因此 $Z_k = Z_k - Z_k^C$ 和 $Z_{k'} = Z_{k'} + 1$ ，其中 k' 為 k 之鄰近點。因為沙粒可以從晶格 R 的邊界流失，所以經過一系列的崩落和接收過程後，將導致所有晶格點上沙粒高度差小於其鄰近點個數 ($Z_j < Z_j^C$ ，對所有的晶格點 j)。此時不再有沙粒傳遞現象而形成一穩定態，我們稱此為一次雪崩 (avalanche) 過程。

透過不斷重覆地從外界加一顆沙粒到任意選的一個晶格點，此沙堆系統會不斷的演化、外貌不斷地改變。BTW 在二維的正方形和三維的立方晶格上記錄著每次雪崩中參與崩塌的晶格點總數 (即雪崩大小) 與發生此種事件的機率，他們發現的確有著幕次行為，也就是說 BTW 沙堆晶格模型的確是一個自組臨界系統。

II. 研究動機:

隨著沙堆晶格模型的提出，若干實驗^[7]也隨之進行，其中最成功且完整的一個實驗在 1996 年發表於 Nature 雜誌，是由在挪威奧斯陸大學的 Frette 等人^[8]利用米粒代替沙粒，花了一年的時間觀測所得到的結果。

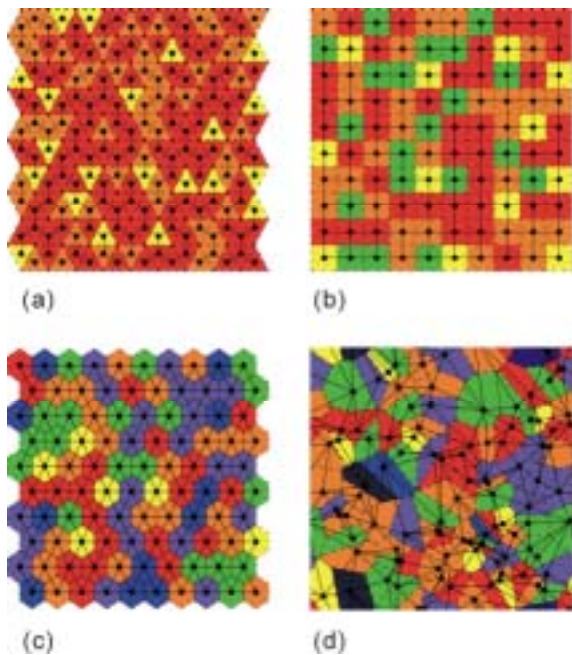
Frette 等人利用三種不同品種的米來進行這個實驗。第一種米比較細長，但表面粗糙。第二種米比較圓且表面平滑，第三種米細長程度與第一種相類似但表面平滑。也就是米粒長寬比是第一和第三種較大、平滑度是第二和第三種較佳。將這三種米分別放入兩片平行且立於桌面的玻璃板間，米粒會因玻璃板的限制而形成一米粒堆。實驗的設計令兩片玻璃板之間距小於米粒長度，使得形成的米粒堆為片狀。透過不斷地從玻璃板上方加入米粒後，則米粒堆高度會增高或引起米粒崩塌，使得米堆形貌不斷地改變。在這當中若崩塌的米粒抵達玻璃板的兩個邊緣處，米粒會在那裏流失，離開系統。在這個實驗中，Frette 等人對每次崩塌米粒數做了記錄。他們在不同的玻璃板寬度 (即米堆可以擴展而不會掉到系統外的範圍) 做了相同的測量。結果他們發現第一和第三種米遵循幕次定律和有限大小尺度律 (finite size scaling)^[9]，而第二種米

則無。總結來說我們可以知道米粒堆是否具有自組臨界性是與米粒長寬比有關而與平滑程度無關。

經過這個實驗的啟發，讓我們想要研究關於沙堆模形的臨界指數和普適性。也因此開始了一系列與此有關的研究^[10, 11, 12, 13]。

III. 模擬

圖一是四種我們用來模擬沙堆的晶格，包括了蜂巢形、四方形、三角形、和隨機晶格(random lattice)^[12, 14]。每一種晶格上有一組穩定的沙堆高度組態 $\{Z_i\}$ 。如圖所示，晶格點間被實線所相連結，虛線代表著對偶晶格(dual lattice)的鍵，而每一個晶格點的沙粒高度，由對偶晶格所圍繞的多邊形顏色所表示。



圖一、(a). 蜂巢形晶格。每一個晶格點有三個相鄰點，即 $Z_j^C=3$ 。(b). 四方形晶格。每一個晶格點有四個相鄰點，即 $Z_j^C=4$ 。(c). 三角形晶格。每個晶格點有六個相鄰點，即 $Z_j^C=6$ 。(d). 隨機晶格。每一個晶格點的相鄰點數不一，從 $Z_j^C=3, 4, 5, \dots$ 皆有可能。

根據以前的研究^[15]，雪崩過程可以分解為一系列更基本的波形崩落 (waves of topplings) 過程。它的實際作法如下：當由外界加入一顆沙粒到 i 點時 Z_i 增加 1，如果 $Z_i > Z_i^C$ ，一個雪崩過程產生。在

這過程中，起初 i 點傳送 Z_i^C 顆沙粒到鄰近點，接

著就是一連串的崩落和接收沙粒過程。若在這過程中 i 點的每一個鄰近點 k 皆達到崩落條件 ($Z_k >$

Z_k^C)，每一個鄰近點 k ，皆會傳送一個沙粒到 i 點。

此時 i 點又達到了崩落條件 ($Z_i > Z_i^C$)， i 點照說

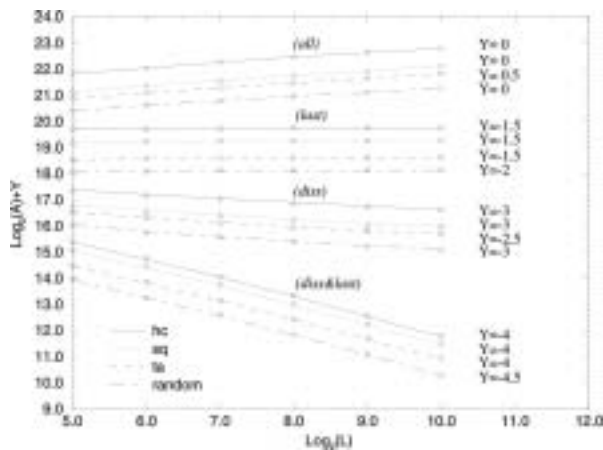
應該再次傳送粒子到鄰近點。但我們先將 i 保持不再崩落 (Z_i 不變)，而讓其它的不穩定晶格點崩

落，一直到 i 點以外的晶格點都穩定為止，這樣就形成了第一次崩落波 (the first wave of toppling)。此時再讓 i 點崩落，經過連串的崩落和接收過程，如果 i 點最鄰近點的崩落又造成 i 點再回復不穩定，我們仍先將 Z_i 保持不變，而讓

其他的不穩定晶格點崩落。一直到 i 點以外的晶格點都穩定下來為止，這樣就形成了第二次崩落波 (the second wave of toppling)。依此類推，一

直到 i 點崩落後它不再因最鄰近點的崩落而回復不穩定，此時其他點繼續崩落，直到所有的點都變為穩定，這時形成的波稱作最終波 (the last wave) 以 W_{last} 表示。有沙粒從系統邊界掉落的波叫耗散

波(dissipating wave)，以 W_{diss} 來表示。既是最終波又是耗散波的崩落波叫最終耗散波 (dissipating last wave)，以 $W_{diss\&last}$ 表示。各種波的總稱以 W_{all} 表示。

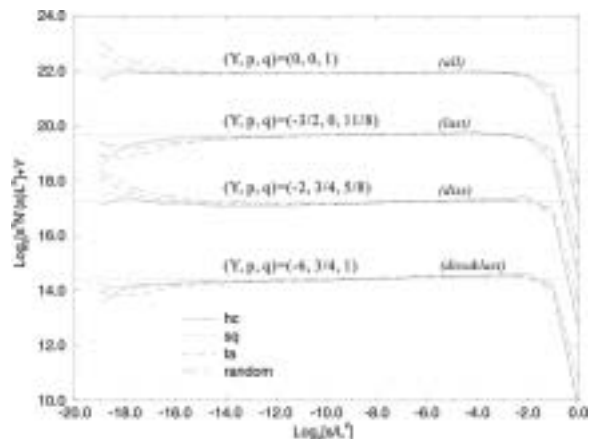


圖二：四種不同晶格與四種波形之線性長度 L 與總個數 A 之雙對數函數圖。圖中 hc 為蜂巢形、sq 為正方形、ta 為三角形、random 為隨機晶格。為了方便比較同一類波在不同晶格之斜率，每條曲線對縱軸平移 Y 。

現在考慮圖一的 4 種晶格，每一種晶格分別模擬其線性長度為 $L=32, 64, 128, 256, 512$ 和 1024 的情形(晶格點數 $N=L^2$)。對每一個 L ，我們等沙堆到達臨界狀態後，再加入 $n=4 \times 10^7$ 顆沙粒去模擬沙堆演化。我們算出演化過程中出現所有的 W_{all} 、 W_{last} 、 W_{diss} 和 $W_{diss\&last}$ 之總個數 A_{all} 、 A_{last} 、 A_{diss} 和 $A_{diss\&last}$ 。以線性長度 L 之對數為橫軸、總個數 A 之對數為縱軸畫在圖二上，圖二之線性特徵顯示總個數 A 對線性長度 L 之函數遵循幕次定律 $A(L) \propto L^a$ 。

觀察四種不同晶格，又發現對每一種特定波形直線的斜率在數值模擬誤差範圍內相同。因此我們可以說，對不同的晶格、特定的波形，指數 a 相同。

接著我們記錄波形崩落中參與崩落過程的晶格點總數 s 與發生此種事件的總數 $sN'(s)$ ，其中 $N'(s)=AN(s)$ 且 $N(s)$ 為發生 s 大小波形崩落的機率密度。我們發現對各種波形和各種晶格波形大小分佈亦滿足幕次定律 $sN'(s) \propto s^b$ ，即基本上對事件



圖三：四種不同晶格與四種波形之 $s^p N'(s) L^q$ 與 s/L^2 之雙對數函數圖。不同波形之 p 和 q 值來自文獻^[10]。 Y 為每條曲線對縱軸向上平移的距離。

的總數 $sN'(s)$ 與波形崩落大小 s 以雙對數作圖，此函數為一斜率為 b 的直線。在 2000 年我們有一篇文章^[10] 探討運用立體投影法 (stereographic projection) 精確求得指數 b 與預測有限大小尺度函數 (finite size scaling function) 的行為，此結果並在正方形晶格上的模擬獲得証驗。因此以在那個工作求得之 p 與 q 讓 $s^p N'(s) L^q$ 對 s/L^2 以雙對數作圖。由圖三，我們再次發現每種晶格對特定的波形，其函數曲線是重疊的。此表示四種不同的晶格有相同的臨界指數 q ，即 BTW 沙堆模型之臨界指數具有普適性。對 W_{all} 、 W_{last} 、 W_{diss} 及 $W_{diss\&last}$ 而言， q 分別為 1、11/8、5/8、和 1。

IV. 結論

根據我們的數值模擬，沙堆模型在四種晶格中有相同的臨界指數，也就是說，他們有著普適性，與系統內部細節無關。在真實的米粒實驗^[8]中，米粒堆會不會有自組臨界性是跟米粒的長寬比有

關。長米才有自組臨界性，圓米則沒有，這表示米粒的臨界性與系統細節息息相關。合理的解釋是米粒實驗中，在米粒的崩落過程中，米粒與米粒間會有能量的耗散。而我們的晶格模型則沒有。如果我們把晶格模型修正到有能量耗散，則觀察晶格模型是否還有普適性將是一件有趣的課題。

參考文獻：

- [1] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford Univ. Press, New York, 1971).
- [2] B. Gutenberg and C. F. Richter, *Seismicity of the Earth* (Princeton Univ. Press, NJ, 1949).
- [3] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1983).
- [4] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
- [5] P. Bak, *How Nature Works* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [6] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
- [7] See the references of chapter 4 in Ref. [5].
- [8] V. Frette *et al.*, *Nature* **379**, 49 (1995).
- [9] Finite Size Scaling, J. L. Cardy, editor (Elsevier Science Pub. Co., Amsterdam, 1988).
- [10] C.-K. Hu, E. V. Ivashkevich, C.-Y. Lin, and V. B. Priezzhev, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4048 (2000).
- [11] V. B. Priezzhev, E. V. Ivashkevich, A. M. Povolotsky, and C.-K. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 084301 (2001).
- [12] C.-Y. Lin and C.-K. Hu, "Universality and Scaling in waves of sandpile on regular and random lattices", submitted to *Phys. Rev. Lett.*
- [13] C.-Y. Lin and C.-K. Hu, "Renormalization Group Approach to an Abelian sandpile Model on Planar Lattices", e-print cond-mat/0204243 and submitted to *Phys. Rev. E*.
- [14] C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).; H.-P. Hsu, S. C. Lin and C.-K. Hu, *Phys. Rev. E* **64**, 16127 (2001).
- [15] E. V. Ivashkevich, D. V. Ktitarev, and V. B. Priezzhev, *Physica A* **209**, 347 (1994).