多組態相對論混相理論

黃克寧
國立台灣大學 物理學系
中央研究院 原子與分子科學研究所
e-mail: knhuang@mcrrpa.iams.sinica.edu.tw

一、簡介

在探討原子結構和碰撞過程中，如果我們感興趣的對象為具有較高原子序的原子，此時一方面由於電子數增加, 電子相關效應趨於複雜, 另一方面, 由於原子核的電荷增加，使得相對論效應益形重要，兩者交互為用，使得重原子或離子的結構成為極具挑戰性的問題。

一般而言，相對論效應可以由相對論性的哈密頓算符囊括，要考慮電子相關效應就困難多了。目前已經發展出幾種方法，由相對論性方程式出發， 以解決原子的多體結構問題，本文將要介紹多組態狄拉克-弗克理論(multiconfiguration Dirac-Fock method，MCDF)[1,2]，相對論混相理論(relativistic random-phase approximation，RRPA)[3,4]，以及多組態相對論混相理論(multiconfiguration relativistic random-phase approximation，MCRRPA)[5]。

首先談到，MCDF 理論利用多組態波函數，來近似描述實際的物理態及其躍遷。MCDF 的優點是，只要組態選擇恰當而且夠多，就可以得到相當可靠的結果。這個方法幾乎可以應用到所有的原子系統，因此，對許多等電子系列都已經有大量的計算，應用的範圍相當廣泛[6-12]。然而，MCDF 也有其限制：首先，MCDF 的計算結果與其所使用的規範(gauge)有關，這和物理現實相悖，對於從事理論基礎研究的人來說, 有如芒刺在背，是極大的缺憾；再則，它只能考慮束縛態的相關效應，而忽略連續態的影響；此外，由於 MCDF 所使用的初態和末態波函數是分別獨立處理的，如果在選擇組態時，兩者沒有相互呼應，所求得的光譜，有可能出現錯誤的精細結構，使用者必需非常小心[13-15]。

其次我們談到，RRPA 理論以單一個組態來描述基準態，因此，它比較適合處理滿殼層原子或離子的問題。不過，它也有其優點，第一，它的計算結果與規範的選擇無關，這一點讓我們放心許多；第二，RRPA 兼顧束縛態與連續態，其所包含的相關效應比較完整；第三，在 RRPA 中，對躍遷過程的初態和末態是一併處理的而不致有所偏頗；第四，RRPA 很方便處理核遮蔽效應(core-shielding effects)的問題；最後第五，由於從相對論性的方程式出發，RRPA 自始即包含了精細結構以及自旋偏極化等效應，理論基礎相當完備。

目前 RRPA 理論已廣泛地被應用到滿殼層的原子與離子系統[4,16-25]。尤其是對極化光電子的計算，得到非常好的結果，解決了當時實驗與理論上的爭議，故而發表了一篇 Phys. Rev. Lett. 的文章[18]。對

於惰性氣體元素，由於其基態和激發態之間的能量間隙較大，用單一組態來描述其基態，問題不大，而且過去的計算結果，都相當令人滿意。但是對於鹼土族這一類的元素，雖然也是滿殼層系統，由於其低激發態的能階與基態非常接近，而且雙電子激發態也相當重要，而 RRPA 理論就未能適當處理雙電子激發的效應，因此所得到的結果就不那麼令人滿意了。

多體原子系統的能態，通常無法由單一電子組態來精確描述。原則上，我們可以經由求解相對論性運動方程式(relativistic equations-of-motion，REOM)[26]，將一切電子相關效應納入併同處理，如此我們就可以處理具有開殼層的原子系統。不過，在求解一般 REOM 的計算上，仍有技術上的困難有待克服。就現有較成熟的多體理論裏，我們嘗試改進 RRPA 理論，而發展出多組態相對論混相理論(MCRRPA)[5]。在 MCRRPA 裏，我們以多組態波函數來描述基準態，取代了 RRPA 裏單一組態的近似，大大地拓展了 RRPA 理論應用的範圍。

簡單地說，MCRRPA 理論為 MCDF 與 RRPA 的結合推廣，在 MCRRPA 理論中，電子之間的相關效應皆經由多組態處理。原子的基準態波函數不再由單一組態來表示，而由基態和部分低激發態的組態混成，如此一來，我們所處理的效應，自始就包含了電子軌域受到彼此庫倫作用力造成的極化現象。由於初態已經包含部分激發態的組態，透過交互作用而躍遷達到的末態，也是由多組態組合而成，其中自然包含了重要的雙電子激發態成分。由於 MCRRPA 理論包含了 MCDF 的長處，也同時保存了 RRPA 的所有優點，因此，提供了一個很好的相對論性的多體理論模型，也有助於我們深入了解多體系統內的相關效應。

具體而言，在 MCRRPA 理論裏，將含 N 個電子的原子系統，由許多組態來描述，而每一個組態的加權，則由隨時間 t 變化的加權係數來決定。經由依時變分法(time-dependent variational method)，我們得到在外加場下的依時多組態狄拉克-弗克方程式(time-dependent Dirac-Fock equations)。其中與時間 t 無關的項，就是 MCDF 理論用來描述原子系統的方式，而含時間 t 的最低項，則代表原子態對外加場的線性反饋，我們將這線性反饋的方程式稱為 MCRRPA 方程式。如果我們選擇基準態為單一組態，則此方程式會自動約化為 RRPA 方程式。當然，我們也可以由 REOM 的觀點出發，而推導得到 MCRRPA 理論。在本文中，我們將介紹 MCRRPA 理論，以及其在原子結構與光譜方面的應用。

二、MCRRPA 基本理論

在 MCRRPA 理論裏，我們假設多電子系統的相對論性哈密頓算符為

$$\mathcal{H}(t) = H + V(t) \ , \tag{1}$$

其中與時間 t 無關的 H 為

$$H = \sum_{n=1}^{N} h_n + \sum_{n<m}^{N} v_{nm} \ . \tag{2}$$

此處 h_n 為第 n 個電子之狄拉克-哈密頓算符(Dirac Hamiltonian)

$$h_n = c\boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{p}_n + \beta_n mc^2 - \frac{Ze^2}{r_n} , \tag{3}$$

而 v_{nm} 為電子之間的庫倫位能,

$$v_{nm} = \frac{e^2}{r_{nm}} . \tag{4}$$

在上述式(2)中，雖然並未包含與布賴特相互作用力(Breit interaction)有關的位能，但是在必要時，我們也可以在式(2)中引入該項。

在式(1)中，$V(t)$代表隨時間變化的外加場，

$$V(t) = v_+ e^{-i\omega t} + v_- e^{+i\omega t}\,, \tag{5}$$

$$v_\pm = \sum_{n=1}^{N} v_{n\pm}\,, \tag{6}$$

其中$v_{n\pm}$由電磁場$\mathbf{A}(\mathbf{r}_n)$造成，

$$v_{n+} = \boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{A}_n \quad \text{和}\; v_{n-} = v_{n+}^\dagger \quad , \tag{7}$$

原子能態間的躍遷即是由其所引發。

我們令$\Phi(t)$為多電子系統的狄拉克方程式的解，

$$i\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \mathcal{H}(t)\Phi(t)\,. \tag{8}$$

原則上多體系統的狄拉克方程式，是無法利用一般微分方程式的技巧，來精確求解的。因此，我們將式(8)轉換為等價的依時變分形式：

$$\left\langle \delta\Phi(t)\right| i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(t) \left|\Phi(t)\right\rangle = 0 \;, \tag{9}$$

這表示在任何時刻t，波函數$\Phi(t)$的誤差值都被保持為極小。為了方便計算，我們可以將波函數以另一個形式呈現，

$$\Phi(t) = e^{-iEt}\Psi(t)\,, \tag{10}$$

這裡我們選擇E為與時間無關的哈密頓算符H的穩定態能量。式(9)的變分法因此可以改寫成

$$\left\langle \delta\Psi(t)\right| E + i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(t) \left|\Psi(t)\right\rangle = 0\,. \tag{11}$$

我們將波函數$\Psi(t)$以組態波函數$\psi_a(t)$展開為

$$\Psi(t) = \sum_a C_a(t)\psi_a(t)\,, \tag{12}$$

其中$C_a(t)$是第a個組態的加權係數。如此，我們可以將變分式(11)改寫為

$$\begin{aligned}
&\left\langle \delta\Psi(t)\right| E + i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(t) \left|\Psi(t)\right\rangle \\
&= \sum_a C_a^*(t)C_a(t)\left[EC_b + i\frac{\partial C_b(t)}{\partial t}\right]\left\langle \psi_a(t)\middle|\psi_b(t)\right\rangle \\
&+ \sum_{ab} C_a^*(t)C_a(t)\left\langle \psi_a(t)\right| i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(t)\left|\psi_b(t)\right\rangle \qquad .
\end{aligned} \tag{13}$$

為了確保波函數$\Psi(t)$的正交歸一性，組態波函數$\psi_a(t)$和加權係數$C_a(t)$必須滿足以下的條件，

$$\left\langle \psi_a(t)\middle|\psi_b(t)\right\rangle = \delta_{ab}\,, \tag{14}$$

$$\sum_a C_a^*(t)C_a(t) = 1\,. \tag{15}$$

此處的組態波函數$\psi_a(t)$是由單電子軌域$u_\alpha(t)$建構而成。為了確保組態波函數$\psi_a(t)$符合式(14)的正交歸一條件，我們要求單電子軌域$u_\alpha(t)$為正交歸一：

$$\left\langle u_\alpha(t)\middle|u_\beta(t)\right\rangle = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{16}$$

經由式(11)的變分，和式(16)的正交歸一條件，我們可以分別得到加權係數$C_a(t)$和單電子軌域$u_\alpha(t)$的方程式：

$$\begin{aligned}
&\left[E + i\frac{\partial}{\partial t}\right]C_A(t) \\
&+ \sum_b \left\{\left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} - \mathcal{H}(t)_{ab}\right\}C_b(t) = 0\,,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{ab} C_a^*(t)C_b(t)\left\{\delta_\alpha^\dagger\left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} - \delta_\alpha^\dagger\mathcal{H}(t)_{ab}\right\} \\
&= \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta}(t)u_\beta(t)\;.
\end{aligned} \tag{18}$$

此處我們引入拉格朗治乘子$\gamma_{\alpha\beta}(t)$確保式(16)的正交歸一性。同時我們使用了簡化的符號

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} \equiv \left\langle \psi_a(t) \middle| i\frac{\partial}{\partial t} \middle| \psi_b(t) \right\rangle , \qquad (19)$$

$$\mathcal{H}(t)_{ab} \equiv \left\langle \psi_a(t) \middle| \mathcal{H}(t) \middle| \psi_b(t) \right\rangle , \qquad (20)$$

同時也將對泛函微分的符號寫成

$$\delta_\alpha^\dagger \left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} \equiv \frac{\delta}{\delta u_\alpha^\dagger}\left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} , \qquad (21)$$

$$\delta_\alpha^\dagger \mathcal{H}(t)_{ab} \equiv \frac{\delta}{\delta u_\alpha^\dagger}\mathcal{H}(t)_{ab} . \qquad (22)$$

在式(1)中, 我們假設哈密頓算符 $\mathcal{H}(t)$ 包含了與時間 t 無關的 H, 用以描述多電子系統的動力學性質, 以及隨時間 t 作簡諧變化的外加場 $V(t)$。因此, 我們可以假設波函數 $\Psi(t)$ 亦隨時間 t 作簡諧變化：

$$C_a(t) = C_a + [C_a]_+ e^{-i\omega t} + [C_a]_- e^{+i\omega t} + \cdots \quad (23)$$

$$u_\alpha(t) = u_\alpha + w_{\alpha+} e^{-i\omega t} + w_{\alpha-} e^{+i\omega t} + \cdots \qquad (24)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(t) = \gamma_{\alpha\beta} + [\gamma_{\alpha\beta}]_+ e^{-i\omega t} + [\gamma_{\alpha\beta}]_- e^{+i\omega t} + \cdots (25)$$

上述式子包含了未明確寫出的高階簡諧項 將式(23)至(25)代入式(17)及(18)後再展開, 並保留其零階及一階項, 我們將得到兩組方程式。其中零階方程式與外加場無關, 即為一般 MCDF 用來描述原子態的方程式。一階方程式含外加場, 這就是 MCRRPA 方程式。它代表了原子態對於外加場所產生的線性反饋.。兩者分別寫成

(i) MCDF 方程式

$$EC_a - \sum_b [H_{ab}]_0 C_b = 0 , \qquad (26)$$

$$\sum_{ab} C_a^* C_b [\delta_\alpha^\dagger H_{ab}]_0 + \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} u_\beta = 0 \qquad . \qquad (27)$$

(ii) MCRRPA 方程式

$$(E \pm \omega)[C_a]_\pm - \sum_b \left\{[H_{ab}]_0 [C_b]_\pm + [H_{ab}]_\pm C_b\right\}$$
$$= \sum_b [V_{ab}]_\pm C_b , \qquad (28)$$

$$\sum_{ab} C_a^* C_b \left\{ \left[\delta_\alpha^\dagger \left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} \right]_\pm - [\delta_\alpha^\dagger H_{ab}]_\pm \right\}$$
$$- \sum_{ab} \left\{ [C_a]_\pm^* C_b + C_a^* [C_b]_\pm \right\} [\delta_\alpha^\dagger H_{ab}]_0$$
$$- \sum_\beta \left\{ \gamma_{\alpha\beta} w_{\beta\pm} + [\gamma_{\alpha\beta}]_\pm u_\beta \right\}$$
$$= \sum_{ab} C_a^* C_b [\delta_\alpha^\dagger V_{ab}]_\pm . \qquad (29)$$

式(26)至(29)中, 方括弧外的下標 0 和正負號±, 分別代表當我們將矩陣元對時間展開時, 與時間無關及與 $e^{\pm i\omega t}$ 成正比的項。

$$H_{ab} \equiv \left\langle \psi_a(t) \middle| H \middle| \psi_b(t) \right\rangle$$
$$= [H_{ab}]_0 + [H_{ab}]_+ e^{-i\omega t} + [H_{ab}]_- e^{+i\omega t} + \cdots (30)$$

$$V_{ab} \equiv \left\langle \psi_a(t) \middle| V(t) \middle| \psi_b(t) \right\rangle$$
$$= [V_{ab}]_+ e^{-i\omega t} + [V_{ab}]_- e^{+i\omega t} + \cdots \qquad (31)$$

$$\delta_\alpha^\dagger \left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab} = \left[\delta_\alpha^\dagger \left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab}\right]_+ e^{-i\omega t}$$
$$+ \left[\delta_\alpha^\dagger \left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]_{ab}\right]_- e^{+i\omega t} + \cdots \qquad (32)$$

$$\delta_\alpha^\dagger H_{ab} = [\delta_\alpha^\dagger H_{ab}]_0 + [\delta_\alpha^\dagger H_{ab}]_+ e^{-i\omega t}$$
$$+ [\delta_\alpha^\dagger H_{ab}]_- e^{+i\omega t} + \cdots \qquad (33)$$

$$\delta_\alpha^\dagger V_{ab} = [\delta_\alpha^\dagger V_{ab}]_+ e^{-i\omega t} + [\delta_\alpha^\dagger V_{ab}]_- e^{+i\omega t} + \cdots (34)$$

式(31)至(34)中的展開係數分別定義如下：

$$[V_{ab}]_\pm = \left\langle \psi_a \middle| v_\pm \middle| \psi_b \right\rangle = (v_\pm)_{ab} , \qquad (35)$$

$$[\delta_\alpha^\dagger V_{ab}]_\pm = \delta_\alpha^\dagger \ (v_\pm)_{ab} . \qquad (36)$$

式(26)中, 參數 E 為 MCDF 方程式中原子系統的能量。MCDF 方程式的解提供了原子系統受到外加場擾動之前的穩定基準態。MCRRPA 的非齊次方程式(28)及式(29)描述了原子受到外加場 $v_\pm$ 擾動時, 所產

生的線性反饋。如果忽略 MCRRPA 方程式中的 $v_{\pm}$，對這齊次方程式求解，所得到的本徵函數，構成一組完備基底，所有 MCRRPA 方程式的非齊次解，均可以由這組基底展開。MCRRPA 的齊次方程式描述了原子系統以其自然頻率 ω 震盪的情形。本徵值 ω 和本徵函數 $w_{\alpha\pm}$，隱含原子系統的激發態在束縛和連續能譜上的一切訊息。

對於像鹼土族元素，原子在封閉殼層外有兩個價電子，MCRRPA 方程式可以進一步簡化，以方便計算。目前我們處理的系統還僅限於這一類兩個價電子的原子或離子，但是，原則上 MCRRPA 理論可以不必受到兩個價電子的限制。將 MCRRPA 理論進一步應用到三個以上價電子系統的技巧，仍在發展中。數年前，我們曾簡單地介紹過 MCRRPA 理論與應用[27]，有興趣的讀者可以參考。

三、結果

我們提出 MCRRPA 理論之後，首先應用到類鈹離子的激發上，就得到令人激勵的結果，並且發表在 Phys. Rev. Lett. 上[28]。在其後的將近二十年中，我們發表了二十餘篇有關光激發與光游離的論文[29-49]，以及許多未正式發表的 MCRRPA 計算結果，散見於博士與碩士論文中[50-56]。

舉例而言，我們針對類鈹、類鎂、類鋅、類鎘、及類汞離子系列的組間激發 (intercombination excitation) ${}^1S_0 \rightarrow {}^3P_1^o$ 、共振激發 (resonance excitation) ${}^1S_0 \rightarrow {}^1P_1^o$ 、以及類鉛離子的磁偶極激發 $(6p^2)^3P_0 \rightarrow (6p^2)^3P_1$ 的激發能量和振子強度，做了一系列的計算。我們發現，對於低游離態的離子，組間和共振激發的能量，大致上都和價電子所感受到的有效核電荷成正比。然而，對於高游離態的離子而言，共振激發的能量增加得遠比組間激發要快得多。我們對這個有系統的變化提出了解釋。當離子帶電荷不高時，共振激發和組間激發能量的主要貢獻，都來自於電子之間的庫倫作用，而庫倫作用造成的效應，恰好正比於核電荷 Z。當離子的帶電荷逐漸增高，哈密頓算符中的單電子項轉趨顯著，而這部分的效應則和 $Z^2(Z\alpha)^2$ 成正比。在組間激發能中，初態和末態中的單電子項互相抵消，因此這部分的影響不明顯，而在計算共振激發能的時候，這部分變成主導項，使得能量在高游離態時，呈現和 Z^4 成正比的關係。

再舉一新近的例子。我們針對鋅原子光游離過程中的雙電子激發共振作精密計算。發現相對論效應與電子相關效應，對價電子 4*s* 的光游離截面、角分佈、以及自旋極化，皆有很重要的影響。我們的 MCRRPA 計算，與實驗[57,58]吻合得非常好，此項結果發表在 Phys. Rev. Lett.上[48]。

四、結論

利用 MCRRPA 理論，我們已經針對兩個價電子的原子系統之光游離和光激發過程進行一系列的研究。其中對電子之間的相關效應以及相對論效應都有深入的探討。我們發現，MCRRPA 理論確實能夠適當地描述原子的光游離及光激發過程。尤其是對於雙激發態、原子的價電子極化、與核遮蔽效應等，MCRRPA 理論都能幫助我們清晰的分析各種效應。

一般而言，如果我們預期雙激發態、價電子極化、與核極化效應顯著的話，我們應該在基準態中加入比較完整的激發組態。而如果核遮蔽效應比較重要的話，我們就應該在計算中加入較多的內殼層激發通道。事實上，在目前的計算中，內殼層激發

通道已經考慮得相當完整，再加入更多通道，對結果並沒有顯著的改變。我們相信，截至目前為止，理論和實際的差距主要來自於核極化效應尚未完全被包含進來。我們將在未來的計算中，將基準態加入內殼層激發組態，以解決核極化效應的問題。

參考文獻

1. J. P. Desclaux, Comput. Phys. Commun. **9**, 31 (1975).
2. I. P. Grant, B. J. McKenzie, P. H. Norrington, D. F. Mayers, and N. C. Pyper, Comput. Phys. Commun. **21**, 207 (1980).
3. W. R. Johnson and C. D. Lin, Phys. Rev. A **20**, 964 (1979).
4. W. R. Johnson and K. T. Cheng, Phys. Rev. A **20**, 978 (1979).
5. K.-N. Huang and W. R. Johnson, Phys. Rev. A **25**, 634 (1982).
6. K. T. Cheng and Y.-K. Kim, At. Data Nucl. Data Tables **22**, 547 (1978).
7. K. T. Cheng, Y.-K. Kim, and J. P. Desclaux, At. Data Nucl. Data Tables **24**, 111 (1979).
8. K.-N. Huang, Y.-K. Kim, K. T. Cheng, and J. P. Desclaux, At. Data Nucl. Data Tables **2**8, 355 (1983).
9. K.-N Huang, At. Data Nucl. Data Tables **30**, 313 (1984).
10. K.-N Huang, At. Data Nucl. Data Tables **32**, 503 (1985).
11. K.-N Huang, At. Data Nucl. Data Tables **34**, 1 (1986).
12. H.-S. Chou, J.-Y. Chang, Y.-H. Chang, and J. P. Desclaux, At. Data Nucl. Data Tables **62**, 77 (1996).
13. K.-N. Huang, Y.-K. Kim, K. T. Cheng, and J. P. Desclaux, Phys. Rev. Lett. **48**, 1245 (1982).
14. Y.-K. Kim and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **26**, 1984 (1982).
15. C.-T. Chen and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **42**, 6934 (1990).
16. C. D. Lin and W. R. Johnson, Phys. Rev. A **15**, 1046 (1977).
17. W. R. Johnson and K. T. Cheng, Phys. Rev. Lett. **40**, 1167 (1978).
18. K.-N Huang, W. R. Johnson, and K. T. Cheng, Phys. Rev. Lett. **43**, 1658(1979).
19. K. T. Cheng, K.-N Huang, and W. R. Johnson, J. Phys. B **13**, L45 (1980).
20. K.-N Huang, W. R. Johnson, and K. T. Cheng, Phys. Lett. A **77**, 234(1980).
21. W. R. Johnson, K. T. Cheng, K.-N. Huang, and M. LeDourneuf, Phys. Rev. A **22**, 989 (1980).
22. K.-N. Huang, W. R. Johnson, and K. T. Cheng, At. Data Nucl. Data Tables **26**, 33 (1981).
23. W. R. Johnson, V. Radojevic, P. Deshmukh, and K. T. Cheng, Phys. Rev. A **25**, 337 (1982).
24. P. Deshmukh and S. T. Manson, Phys. Rev. A **28**, 209 (1983).
25. C. Radojevic and W. R. Johnson, Phys. Rev. A **31**, 2991 (1985).
26. K.-N. Huang, Phys. Rev. A **26**, 734 (1982).
27. K.-N. Huang, H.-C. Chi, and H.-S. Chou, Chin. J.

Phys. **33**, 565 (1995).

28. W. R. Johnson and K.-N. Huang, Phys. Rev. Lett 48, 315 (1982).
29. H.-S. Chou, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Chin. J. Phys. **32**, 261 (1994).
30. K.-N. Huang and W. R. Johnson, Nucl. Instrum. Methods B **9**, 502 (1985).
31. H.-S. Chou, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, J. Phys. B **26**, 4079 (1993).
32. T.-C. Cheng and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **45**, 4367 (1992).
33. H.-S. Chou, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Phys, Rev. A **49**, 2394 (1994).
34. H.-S. Chou and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **46**, 3725 (1992).
35. H.-S. Chou, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **48**, 2453 (1993)
36. H.-S. Chou, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Phys. Lett. A **182**, 302 (1993).
37. H.-S. Chou and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **45**, 1430 (1992)
38. H.-S. Chou, H.-C. Chi and K.-N, Huang, J. Phys. B **26**, 2303 (1993)
39. H.-S. Chou, K.-N. Huang, and W. R. Johnson, Phys. Rev. A **44**, R2769 (1991).
40. H.-S. Chi, K.-N. Huang, and K.T. Cheng, Phys. Rev. A **43**, 2542 (1991).
41. H.-C. Chi and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **43**, 392 (1994)
42. H.-C. Chi and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **50**, 392 (1994).
43. C.-Y. Hwang, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Phys. Rev. A **44**, 7189 (1991).
44. L.-R. Wang, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Phys. Rev. A (submitted).
45. C.-M. Wu, H.-C. Chi, and K.-N, Huang, Phys. Rev. A **46**,1680 (1992).
46. C.-M. Wu, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, J. Phys. B **27**, 3927 (1994)
47. H.-S. Chou and K.-N. Huang, Chin. J. Phys. **35**, 35 (1997).
48. L.-R. Wang, H.-C. Chi, and K.-N. Huang, Phys. Rev. Lett. **83**, 702 (1999).
49. W.-C. Chu, J.-Y. Lin, L.-R. Wang, and K.-N. Huang, Phys. Rev. A(Submitted).
50. 周詳順，國立台灣大學博士論文，1989。
51. 紀信昌，國立台灣大學博士論文，1992。
52. 王伶如，國立台灣大學博士論文，2000。
53. 鄭德俊，國立台灣大學碩士論文，1987。
54. 黃崇源，國立台灣大學碩士論文，1990。
55. 吳常銘，國立台灣大學碩士論文，1991。
56. 林之淵，國立台灣大學碩士論文，2001。
57. M. W. D. Mansfield and J. P. Connerade, Proc. R. Soc. London A **359**, 389 (1978).
58. B. Brehm and H. Pfeiffenberger-Pertl, Z. Phys. A **320**, 37 (1985).