

漫談顆粒體物理

賈魯強 黎璧賢

國立中央大學 物理系及複雜系統中心

e-mail: pylai@fermi.phy.ncu.edu.tw

楔子

當夏季來臨，我們總是會穿著泳褲到海邊和大夥一起去享受海的氣息。而在海灘往往可以看到三五成群的小朋友圍在一起堆沙，互相比較著誰可以把沙堆的比較高（如圖一）。



圖一

但是我們如果仔細去觀察沙堆的崩塌過程，我們將會發現『沙堆的崩塌過程』是一個非常有趣而複雜的問題。由於沙子本身是一個固體，所以我們可以用牛頓力學來描述它。然而當沙堆崩塌時，我們可以在表層看到如同液體一般流動的現象，卻又想使用流體力學來研究。而類似這樣的物質，我們一般都稱為『顆粒體』(Granular materials)。想像慢慢地在同一個地方傾倒沙子堆積沙堆。沙堆變得越來越陡峭，直到一個表面斜度到達一個臨界的斜率。當表面的斜率走到達臨界角度時，增加一粒沙

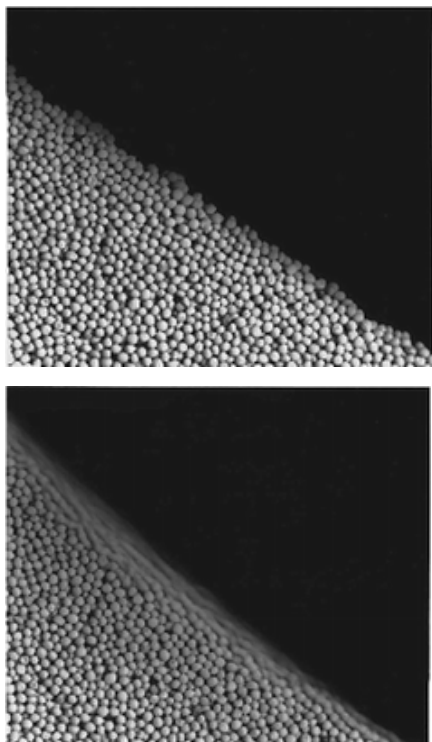
也能觸發全面性的崩塌。而當崩塌結束時，沙堆的表面將回成到它穩定的斜率（安息角）。顆粒的形狀將決定臨界斜率和穩定斜率---你將發現與所有類似圓形的顆粒（如砂糖和細糖），都有相似的特性。當你很穩定讓沙如同水流一邊流過一個細管讓顆粒在桌面形成沙堆，堆積得越來越陡峭直到有崩塌的產生時，你也可以發現相同的現象。然而你即使增加的更多顆粒，沙堆的斜率仍然保持的差不多，這是和一般正常的流體是完全不同的性質。

為什麼要研究顆粒體？

顆粒體在我們日常生活中是隨處可見的：諸如食鹽，糖，咖啡，滑石粉末，沙，煤。顆粒體的研究在工業上的應用相當多，例如在礦物、粉末、藥品的傳輸過程。其他在地質研究，食品製造等也都屬於顆粒體之應用。根據一項統計，美國工業界因顆粒、砂土、藥粉、原料等顆粒體物質的儲存或運送裝置設計不當，總共造成百分之六十的損失。化工業約有一半的產品是顆粒型態，一般工業上用到的未加工材料為顆粒型態的更占了四分之三，工廠輸送帶上的瓶瓶罐罐也可視為顆粒體物質，若再加上因顆粒特性造成的山崩、雪崩等地質改變，美國每年受到影響的金額約有一千兆美元。

顆粒體物質在地心吸力下的靜態結構和流動現象是十分有趣的宏觀科學，最早重視到顆粒體不尋

常的特性的科學家可以追溯到 1773 年，當時庫侖在負責蓋一個城堡，而他發現當砂石堆積的角度大於一個特定的角度 θ_r 之後，會由穩定的靜止態，轉換到一個不穩定的流動態（如圖二）也就是說顆粒體不但可以像固體一樣支撐重量和承受切變（Shear），也能像液體一樣流動。顆粒體之運動主要受到流體力學和摩擦力的行為所左右。顆粒體的有趣現象產生主要是因為摩擦力造成顆粒之間的碰撞是非彈性的碰撞（Inelastic collision）。也就是說在考慮完全彈性碰撞（Complete elastic collision）的狀況下，顆粒體有趣的現象大部分將不會出現。此外，更重要的是當考慮在地心引力下的顆粒體時，溫度在這個系統中是不重要的。而摩擦力使得這個宏觀的系統中形成了一個具有很強耗散性的系統。

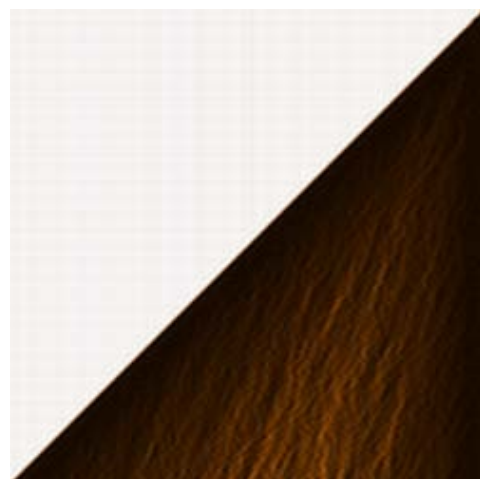


圖二

單一個顆粒的性質，我們可以說都已經十分的瞭解

了，但是當一大群顆粒體聚集起來所產生的現象就變成十分複雜而有趣。他們的物理的行為並不能用一般的固體來理解，同樣的也不能用一般的流體氣體理論來解釋。由於這樣的系統擁有十分複雜，具有非線性的性質，充滿著不穩定性，也使得要去瞭解顆粒體比正常流體還要複雜而困難。所以直到目前物理學家仍然沒有一個很有效的理論可以去描述顆粒體的性質。然而我們仍然可以利用統計物理及多體問題的一些方法來研究這些複雜的問題。例如標度（Scaling）的概念，自發性臨界現象（Self-Organized Criticality），相變（Phase transition）等等，都被用來瞭解顆粒體物理。

而在一個穩定沙堆之中，顆粒基本的作用力主要是鄰近之間顆粒的接觸作用力。而顆粒與顆粒之間，摩擦力扮演了一個很重要的角色。整個沙堆所承受的壓力即是所以顆粒接觸力的總平均。而顆粒之間的力是透過顆粒之間的摩擦力及應力把力傳播出去，這一點是和一般的固體、流體與氣體是完全不同的。我們可以利用光彈效應（Photo-elastic effect）讓沙堆之間的力傳播的結構顯影出來。



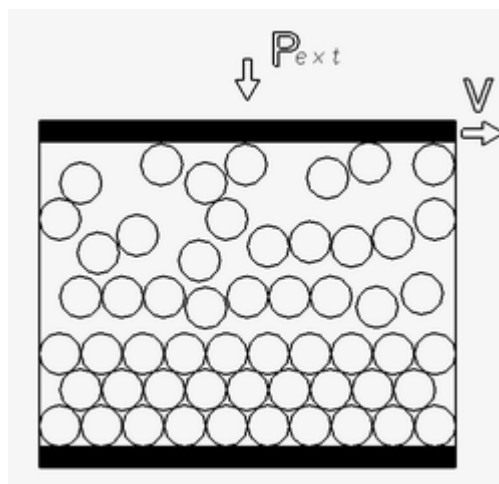
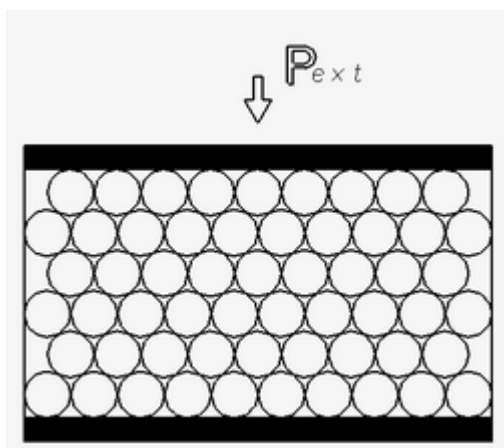
圖三

圖三顯示的是在一個沙堆之中壓力的傳播的示意

圖。其中比較亮的部份代表的那個部分所承受的壓力比較大。而我們也可以發現壓力是很不均勻而且有方向性地傳播的，有一些地方是並沒有壓力存在的。同樣的想像農夫將穀粒倒放入一個穀倉之中，他可能會發現倉底的壓力並不是隨著顆粒的不斷倒入而呈現線性增加。為什麼呢？這是因為當穀粒倒入穀倉後，將有一部份的力將會傳遞到穀倉四周的牆壁。在 1895 年，Janssen 就發現倉底的壓力和顆粒的堆積高度 h 有一個特定的關係：

$$P(h) \propto (1 - e^{-h/h_0}) \quad (1)$$

這裡 h_0 是一個特徵長度。當 $h < h_0$ 時，壓力正比於堆積深度 h 。反之，當 $h \gg h_0$ 時，壓力將成為一個固定的值。在顆粒體間的壓力主要是透過附近顆粒之間的接觸而傳遞出去。由於顆粒和牆之間有磨擦力，所以重力可以被牆壁之摩擦力承受。這也就是為什麼穀倉並不像水壩一樣需要隨著深度的增加而逐漸加厚管壁。基本上穀倉的厚度大約都是一個固定的厚度。



圖四

如果你有海邊仔細觀察漲潮時，你將會發現當沙灘被海浪沖刷時，沙灘的表面顯得乾燥，但是表面下面將產生一些空隙，而被海水所佔據。為了瞭解這個現象，我們可以考慮在兩個平行的平板之間置放許多顆粒體。上面的平板有一個固定的速度 U ，下面的平板則是靜止的。（如圖四）當平板開始移動時，在接近上面平板的顆粒之間開始互相碰撞，相對也就造成彼此之間的距離開始增加。如果是一般牛頓液體在兩個平板之間被切變（shear），在邊界的牆上的剪力（shear force） τ 正比於流體的切變率（shear rate），即

$$\tau \propto \frac{du}{dy}, \quad (2)$$

然而在顆粒體之中只有當切變率較低時上面的式子才成立。在切變率較高時，剪力將變成和切變率的兩次方成比例：

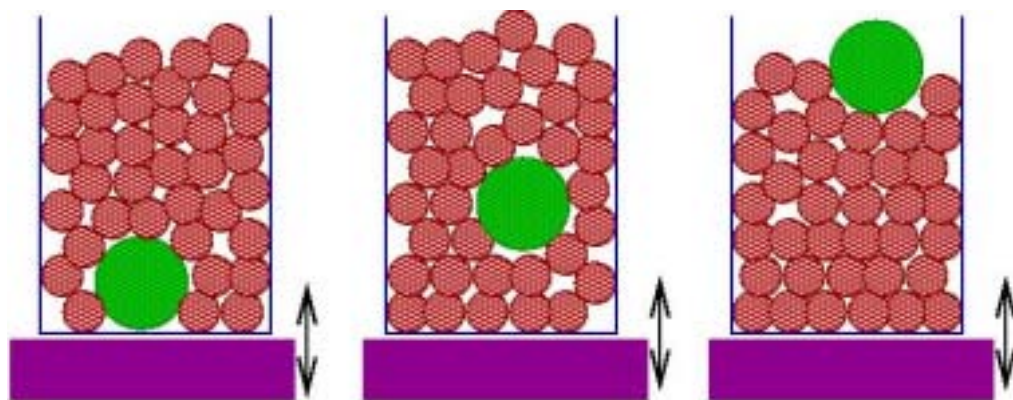
$$\tau \propto \left(\frac{du}{dy}\right)^2. \quad (3)$$

而顆粒體間的碰撞次數也和平均的切變率成比例的

關係。隨著切變時間增加，我們也可以發現流動層的厚度也逐漸地變厚。顆粒之間將由空隙所取代。這也就是所謂的『膨脹現象』(如圖四)。所以我們也就瞭解了為什麼海水可以滲入沙灘之中。

一些有趣現象

如果我們把一個硬幣投入一個糖罐之中，透過上下有規律的搖動，我們將可以發現錢幣逐漸浮現出來，最後這個失蹤的硬幣會出現在糖罐的表層之中。而我們這些懶惰的人沖泡咖啡，往往都使用三合一的即溶咖啡。咖啡、奶精和糖這三者是如何能夠混和均勻的？一般人都會想到利用搖晃來混和這些粉末。而一部分的工廠就是利用振動或旋轉的方法來混合顆粒。事實上在許多工業中，粉末和顆粒的震動是一個十分重要的製造過程。然而在這個簡單的機械搖動過程，當顆粒擁有不同大小、不同重量時，如硬幣一般，我們將會發現在搖動的過程，大的顆粒將會逐漸地被推到表面，而較小的顆粒將會沈到底部。我們把這個分離現象叫做『巴西豆效應』(Brazil Nut effect)。(如圖五)



圖五

如果我們不斷地搖晃或是震動糖罐，讓顆粒開始互

相的碰撞，而逐漸產生流體化，我們將發現震動中的顆粒體將會自發性地產生一些十分有趣的圖像。

考慮一個扁平的盒子，置放在一個振動的平台之中，在盒子內裝滿了相同大小的顆粒。

振動平台是以一個穩定的振幅 A 和頻率 ω 上下振動。我們可以把平台的運動寫成 $y(t) = A\sin(\omega t)$ ，我們可以使用一個無量綱的量

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g}$$

來分析在振動床中顆粒的運動。一般都稱 Γ 為振動加速度。當 $\Gamma \leq 1$ 時，顆粒相對於盒子將不會有任何的位移，所以並不會產生流體化現象。當振動加速度大於 1，將導致表面顆粒能自由地運動，而產生飛躍 (Free Flight) 現象，同時顆粒和盒子的底層也會產生空隙。由於重力的作用，飛躍的顆粒將會掉落而與底層產生碰撞。由於這個週期運動的產生，而使顆粒間產生了對流作用。在低振動加速度 ($\Gamma \sim 1.2$) 時，顆粒會緩緩的向上運動，直到抵達表面。接著又沿著表面滑落，形成一個山丘 (Downward Heap)。圖六(b)顯示顆粒由一個平面慢慢堆積成一個小山丘。通常山丘發生在容器

器中心的部分。然

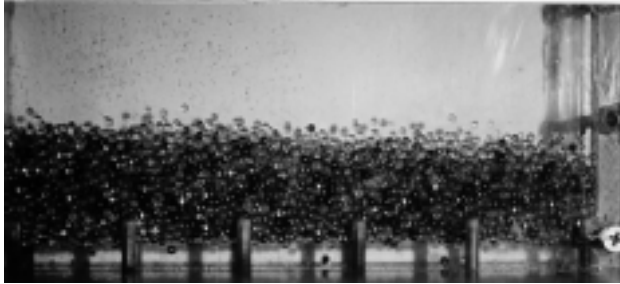
而，如果振動的振幅增加，數個山丘有將同時出現。

而如果逐漸增加振動加速度，也將

可以發現山丘不再形成在容器的

中間。圖六(a)-(d) 顯示振動加速度逐漸增加各種不同穩定結構。圖七中，對流的方向改沿著管壁向上，而在中間部分向下流動。如此反向的對流，

造成了中間向下的盆地 (Upward Heap)。而在不同的振動頻率，也有不同的現象：在頻率較低的狀況，會有堆積現象 (Heaping) 產生；而在頻率較高時，則將會有波形 (Surface Wave) 和拱柱 (Arching) 的產生。



圖六(a)



圖六(b)



圖六(c)



圖六(d)



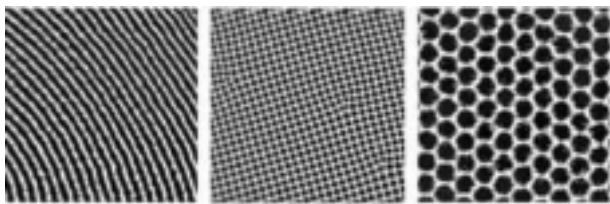
圖七

為了瞭解對流的機制，物理學家嘗試了許多不同的動力學理論去試圖描述顆粒。在這些理論中，垂直的振動主要是增加了顆粒間的空隙的產生。空隙的存在也使得顆粒間可以重新整理，並且因此產生了對流。然而，以往這些理論通常是十分複雜的，並且多數並不是十分成功，不能成功地解釋顆粒堆積形成的機制。所以我們為了瞭解山形結構的物理機制，做了一連串的模擬和理論分析。由於在山形結構形成的過程中，空氣扮演了一個很重要的角色，當真空的狀況下時，山形結構並不會產生。所以在我們的模型中，我們加入了空氣的效應，如此我們成功地建立了運動方程來描述顆粒的山形結構。



圖八

當在容器中只平鋪了數層的顆粒體時，顆粒將在底部的節點部分聚集。這些著名的模式被稱為 Chladni 模式（見圖八）。如果容器的底部沒有節點，上下不斷的振動將使顆粒體能夠產生流體化，而在表面產生不同的圖像，如條紋（Strip）正方形陣（Square）和等邊六角形（Hexagons）（見圖九）。



圖九

這些圖像可以透過改變振動頻率和振幅而改變。Swinney 等做了一系列的實驗和模擬，透過改變頻率和振幅做了十分詳細的研究。從靜止的扁平層開始，逐漸增加振動加速度，看見的第一個模式是方陣或條紋，不同的模式取決於了不同的振動頻率。在更高的振動加速度中，模式慢慢變成等邊六角形。到目前為止，仍然沒有很好的理論可以完全去描述顆粒在薄層振動床的所產生的複雜現象。

旋轉盤(Rotating Drum)

顆粒體的混合與分離在工業上是一個十分重要的過程。顆粒體的分離是一複雜並且不完全地被理解的現象。物理學家在最近的年裡開始對分離現象變得感興趣。要去瞭解顆粒體分離的物理機制，是一個十分困難的工作。除了利用振動床來分離顆粒之外，工業上也利用一個旋轉的柱體或圓盤來混和或分離不同的顆粒。



圖十

在一個旋轉的二維圓盤的實驗中，把兩種不同顆粒混和地放到圓盤中，由於旋轉造成顆粒的流體化而產生了崩塌效應。在圖十之中，可以發現兩種顆粒明顯的分開（其中黑色的顆粒比較平滑；白色的顆粒則較為粗糙）顆粒的尺寸大小或是密度的差別都會導致顆粒的分離現象。當圓盤旋轉時，主要有兩個效果是十分重要的。

第一：原來由顆粒形成的水平表面因為旋轉造成傾斜，當表面的傾斜角度比粒子的臨界角度大時，將產生崩塌而造成流動。第二：顆粒透過旋轉，慢慢沿著圓盤的圓周移動到表面。當傾斜的增加而造成顆粒的流動，將系統達到一個穩定的狀態。

然而當不同的顆粒均勻放到一個旋轉的圓柱之中時，除了產生和圓盤一樣的徑向分離現象外，還可以看到一個更為有趣的現象---軸向的分離（如圖十一）。當如果柱體的旋轉的速度不斷增加，我們將發現顆粒將慢慢由徑向分離轉變成軸向的分離。



圖十一

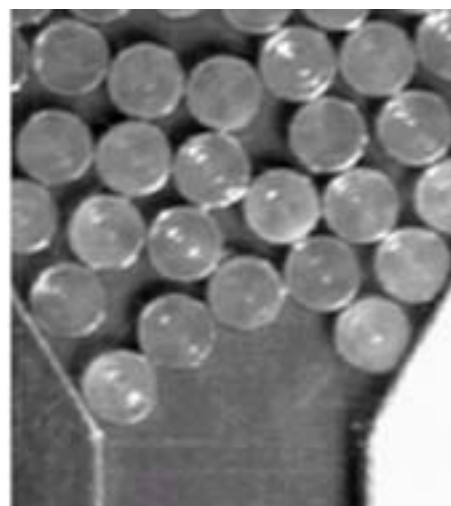
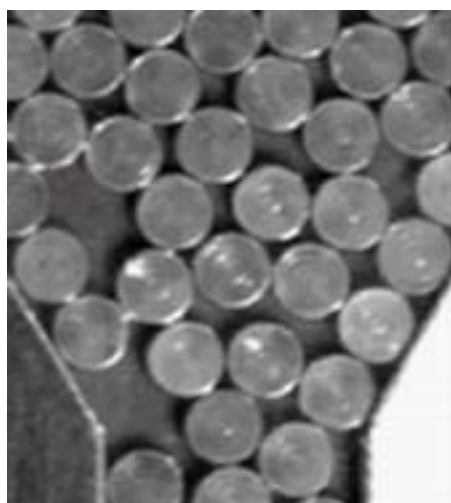
在二維圓盤的研究上，一般都是考慮不同的大小和不同的密度。並沒有人真正瞭解摩擦力在顆粒的分離現象中扮演了什麼樣的角色。所以為了瞭解顆粒分離現象的物理機制，我們建立了一個二維的沙堆模型，考慮兩種大小重樣都相同的顆粒：一種顆粒比較平滑，摩擦係數較小；另外一個則比較粗糙，摩擦係數較大。

我們發現當圓盤的轉速超過了一個臨界的轉速，顆粒將會產生分離。這個由混和態轉變到分離態過程可以使用統計物理中的相變理論來分析。我們也可以把我們模型延伸到三維的旋轉圓柱中，我們可以成功的看到當轉速較慢時，顆粒是徑向分離的，而當旋轉速度是足夠快的時，軸分離也將產生。這代表了再顆粒體的分離現象中，摩擦力扮演了十分重要的角色。

堵塞(Jamming)

顆粒的流動有在工業上有許多應用和探討。過

去這些年有不少科學家在研究顆粒在漏斗中流動的現象。由於很多時候在工業上都利用漏斗來傳輸顆粒，然而往往會發生堵塞狀況的發生，一般正常的液體是不會發生類似的現象。堵塞的發生主要是因為在流動的過程中發生穩定的“拱弧”現象的結果。它藉著壓力的傳遞，把在整個顆粒流的壓力變成一個定值。



圖十二

透過觀察顆粒的流動，我們發現當流動被堵塞時，一些顆粒被拿掉以後，顆粒將可繼續流動。杜其永

等人針對顆粒在二維的漏斗中產生上彎拱的現象做了一些研究，如圖十二。直徑 $D=5\text{mm}$ 的一些金屬圓盤在垂直方向流動，當把漏斗的寬度 R 逐漸縮小，我們將可以看到顆粒將由一個連續流動的區域慢慢轉變到一個堵塞的區域。而主要控制顆粒流是連續還是阻塞的狀況是被一個控制參數 d 所影響。 d 是粒子尺寸 D 和漏斗寬度 R 的比值， $d \equiv R/D$ 。當 d 從 2 增加到 5，顆粒流堵塞機率從約 1 減少到近零。從在堵塞的狀況下觀察由圓盤所形成的彎拱，我們可以把堵塞想成一個隨機行走的軌跡。漏斗中顆粒的壓力傳遞是沒有方向性，任意傳遞的。在漏斗的管壁有壓力鏈支撐大多數的重量，而產生了彎拱的現象。

結語

顆粒體的研究是一個十分有趣的領域，在工業上應用也是十分重要。我們這幾年從事了一連串關於顆粒體的研究，雖然有了一些初步成果。但仍然對顆粒體不是十分的瞭解，所以這個方面的研究仍然持續的進行中。而透過瞭解了顆粒體的性質，我們也將逐漸能瞭解非線性耗散性多體系統的奧妙。

參考資料：

- H. M. Jaeger, S. Nagel, and R. P. Behringer, Rev. Mod. Phys. 68, 1259 (1996); Phys. Today 49(4), 32 (1996)
- P.G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. 71, S374 (1999)
- L. P. Kanadoff, Rev. Mod. Phys. 71, 435 (1999)
- F. Melo et al. Phys. Rev. Lett. 72, 172 (1994); 75, 3838 (1995)
- S. S. Hsiau, and S. J. Pan, Advanced Powder

Technology, 7, 173 (1996)

P.-Y. Lai, L.-C. Jia and C. K. Chan, Phys. Rev. Lett. 79, 4994 (1997)

L.-C. Jia and P.-Y. Lai and C. K. Chan, Phys. Rev. Lett. 83, 3832 (1999)

K. To, P.-Y. Lai and H. K. Pak, Phys. Rev. Lett. 85, 71 (2001)

Websites:

<http://arnold.uchicago.edu/~jaeger/granular2/>

<http://www.phy.duke.edu/~bob/>

<http://cnls.lanl.gov/~ebn/granular.html>

<http://www.msd.anl.gov/groups/sm/granphy/>