薄膜的尺度問題

楊大衍
中央研究院原分所
e-mail: dyyang@po.iams.sinica.edu.tw

摘要

我們介紹 tethered membrane 的簡單相圖，靜態及動態的 scaling 關係。

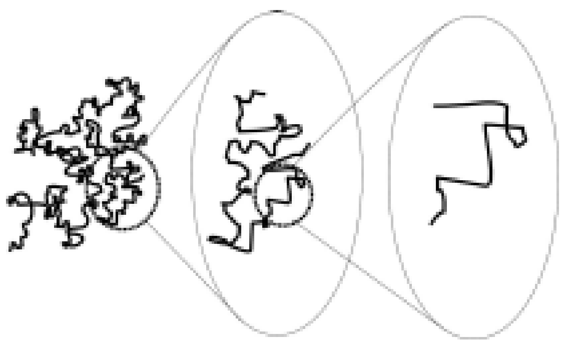
1. Introduction

Tethered membrane 或者稱做 tethered surface 是一個具有內部固定連通性的曲面。簡單來說，我們可以將它視為一組在 d 度空間，經由彈簧串連在一起的網，而網上的結點為鋼珠(hard core)。在還原成一度空間的情況下，它類似一個 random walk 的軌跡或者高分子鏈。這種 tethered membrane 存在於像 cross-linked poly (methyl-methacrylate)及 lipid bilayers 等物質中。相較於與它同類的高分子，tethered membrane 也具有尺度 (scaling) 及相轉換 (phase transition) 的問題。最簡單的相轉換，如 crumpling transition 等。

2.高分子的尺度問題

Tetherd membrane 在幾何上來說，是一度空間的高分子鏈的推廣，它的物理性質也比高分子複雜，在此我們先簡單的介紹一下什麼是高分子的尺度問題。

假如有一條長 L 的高分子鏈，內含 N 個鋼珠(residue)，而且鋼珠與鋼珠間的距離為 ℓ。當然 N 是一個很大的數目，而且鋼珠與鋼珠之間是不會重疊的(self-avoidance)。在一般的溶液中此一高分子的結構就會具有如下圖所示的類似性(self-similarity)，即大框框中的高分子結構，



類似小框框中的高分子結構。不同的框框代表不同的尺度。由於類似性，很多高分子成薄膜的物理性質就與尺度有關。

我們可以利用一個簡單的物理量如 RG (radius of gyration)來描寫此一高分子的平均大小，並了解它的尺度問題。有趣的是 RG 與高分子的長度間有一個簡單的關係存在著:

$R_G \sim L^{\nu}$

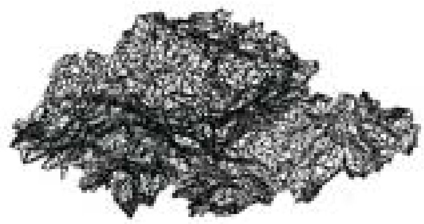
此處$\nu = \frac{3}{2+d}$，它並不等於 1，而且小於 1。這是一個靜態(static)的尺度問題。另外我們考慮此一高分子鏈在溶液中的擴散(diffusion)，在經過一段長時間之後，整個高分子鏈會類似於一個單體的擴散(diffusion)且存在於一個較大的空間中，它的擴散速率 D (diffusion constant) 與 L 的關係也具有指數性質(power law) :

$D \sim L^{-\omega_d}$

此處 $\omega_d = \nu$，它也不等於 1。不難想像，此一高分子鏈愈長，它就擴散得愈慢。隨著高分子濃度的增加，此一關係也不會改變。

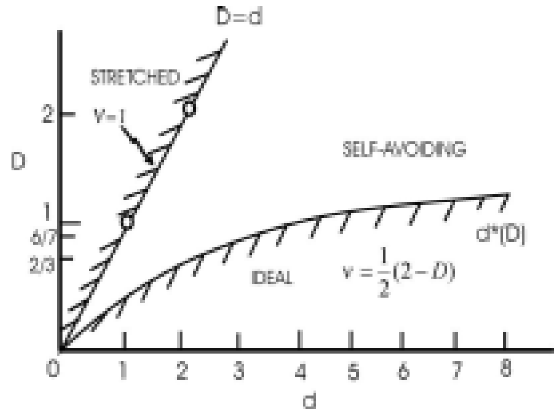
3.薄膜的靜態尺度問題

在前一段落，我們簡單的介紹了低度空間高分子的靜態及動態的尺度關係。它的最簡單推廣就是 tethered membrane 或者稱做 polymerized membrane(又稱做 crystalline membrane)。如下圖所示:



這是一 D 度空間的薄膜，存在於 d 度空間中，鋼珠與鋼珠間有一彈簧的拉扯(stretch)能量，且它們之間是互相排斥的。

我們先來看一看此一薄膜的 R_G 與 L 的關係。它們間的關係比低度空間的高分子複雜多了。它的 ν 值取決於 D 與 d 之間的關係，而此一關係背後的物理意義在於薄膜本身所存在的 phase。我們可以看一下下圖所示的(D，d)關係。這些 phase 的存在是由薄膜的鋼珠間的交互作用力 ν_2 值的尺度關係來決定的。



此處薄膜的平均大小可以被定義成

$R_G \sim L^{\nu}$

，L 是此薄膜在任一度空間上的長度。兩個鋼珠間的交互作用力 ν_2 值的尺度關係就成為

$$\nu_2' = \nu_2 \cdot L^{2D-\frac{(2-D)d}{2}}$$

，L 的指數可以用來定義(d ，D)圖中的相。在此圖中 $d^*(D)=\frac{4D}{2-D}$ 線又稱做 critical line，它區分了薄膜兩種不同的 phase。Ideal phase 中薄膜的鋼珠間交互作用力是可忽略的，因此它的 ν 值為 $\frac{2-D}{2}$。在 self-avoidance 中，又稱做 crumpling phase，在此區域中薄膜的 ν 值為

$$\nu = \frac{D+2}{d+2}。$$

另外一條區分 self-avoidance 及 stretched 的線

為 d = D。然而在 stretched phaes 中，由於薄膜充斥於 d 度空間中，受到鋼珠間的互相排斥，薄膜可以說被扯平了，它的大小就隨著 L 增加而增加，因此 ν 值為 1。

另外在有些情況下，高分子溶液在接近 Θ point 時鋼珠間的交互作用力 v_2 值趨近於零，因此鋼珠間的多體交互作用力(many body interaction)必須要考慮。薄膜也有此一現象。為了包含多體交互作用力，我們可以將 v_2 張擴為 v_n。此時我們發現 v_n 值的尺度關係為：

$$v_n' = v_n \cdot L^{\frac{2-D}{2}\cdot(n-1)\cdot\left[\frac{n}{n-1}\left(\frac{2D}{2-D}\right)-d\right]}$$

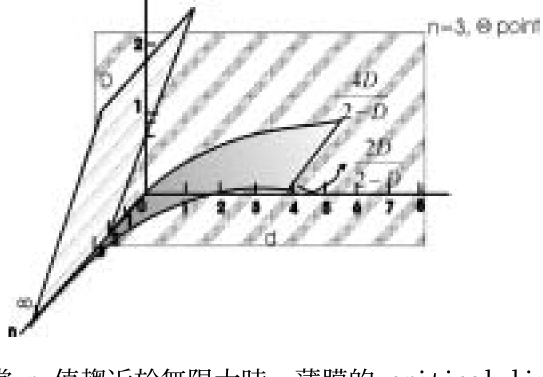
而在(n,d,D)圖中的 critical surface 則為

d= $\frac{2D}{2-D}\cdot\frac{n}{n-1}$

及

d=D

如下圖所示：



當 n 值趨近於無限大時，薄膜的 critical line 成為 $d = \frac{2D}{2-D}$，相圖變得更複雜了。

4.薄膜的動態尺度問題

我們現在考慮當一薄膜在溶液中擴散時，它的尺度關係被定義為

D ~ $L^{-\omega_d}$

，此時的 L 指數 ω_d = (d-2) ν 則與 n 無關。可以了解的，在不同的相中 ω_d 是不同的。而且當薄膜的濃度增加時，此一關係，並未改變。這個性質與高分子相同。

結論：

我們簡單的探討了，在 mean field theory 中，薄膜的靜態及動態的尺度關係。我們發現薄膜比高分子複雜且存在更多的相。簡單的(d , D)圖展示了三種相。在不同的相中它們的動態尺度關係也隨之不同。

參考資料：

1.M. Kardar and D.R. Nelson, Phys. Rev., A38(1988)966.

2.Y. Kantor, M. Kardar and D.R. Nelson , Phys. Rev., A35(1981)3056

3.B. Duplantier in "Statistical Mechanics of Membrane and Surfaces", ed by D.R. Nelson, T. Piran and S. Weinberg (World Scientific, Singapare,1989).

4.D.Y. Yang and S.Y. Sheu, Phys. Rev., E56(1997)3346.

5.S.Y. Sheu and D.Y. Yang, Phys. Rev., E63(2001)061207.