宇宙能量密度與黎曼ζ 函數

林文隆
國立台灣師範大學物理系
e-mail: wenlin2phy03.phy.ntnu.edu.tw

摘要

宇宙之演化由宇宙能量密度來決定，當我們在計算相對論性粒子之能量密度時，總會伴隨著出現黎曼ζ函數，其數值通常由查表得知。如此一來，對黎曼ζ函數並無深入瞭解且對所得結果較缺乏感覺。事實上宇宙能量密度之推導過程非常適合作為物理系高年級學生及研究生課外自學題材，其中串聯著許多數學的方法及概念，包括無窮級數，黎曼ζ函數，傅立葉級數，複變函數，柏努利數，解析數論及混沌理論等。本文淺述其推導過程以供參考。

一、前言

今日宇宙之輻射(即相對論性粒子)由 2.728 K 之宇宙背景光子及三代 1.946 K 之微中子所構成 [1]。而處於熱平衡狀態之早期宇宙除了光子和微中子外尚有大量其他相對論性粒子，由於它們係處於熱平衡狀態，其能量密度 ρ 可表示成相空間分佈函數 $f(\vec{p})$ 之積分(我們採用自然單位,即 $c=\hbar=1$)

$$\rho=\frac{g}{(2\pi)^3}\int E(\vec{p})f(\vec{p})d^3\vec{p} \tag{1}$$

上式中 g 表粒子自旋之自由度， E 爲粒子之能量，即 $E^2=\vec{p}^2+m^2$。 分佈函數則與粒子之自旋有關，自旋爲整數之玻子(例如光子)

$$f(\vec{p})=\frac{1}{e^{E/kT}-1} \tag{2}$$

自旋爲半整數之費米子(例如微中子)則

$$f(\vec{p})=\frac{1}{e^{E/kT}+1} \tag{3}$$

對相對論性粒子而言， $E>>m$， 故能量密度 ρ 可簡化成

$$\rho=\frac{g}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{E^3dE}{e^{E/kT}\mp1} \tag{4}$$

上式中玻子用減號，費米子用加號。底下我們首先討論玻子能量密度如何計算。令 $k=1$ (自然單位)， $x=E/T$ ， 則 ρ 可改寫爲

$$\rho = \frac{gT^4}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} \tag{5}$$

查表得方程式(5)中之積分式

$$I_B = \int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{6}$$

故

$$\rho = g\frac{\pi^2}{30}T^4 \quad \text{(相對論性玻子)} \tag{7}$$

二、宇宙能量密度與黎曼ζ函數

通常我們直接由查表得知 I_B 之數値，當我們深入探討何以方程式(6)之定積分等於 $\frac{\pi^4}{15}$ 時，將會發現這是一個非常有趣的數學問題。事實上它可表示成一個特殊的無窮級數稱之爲黎曼 ζ 函數。首先將方程式(6)之分母展開

$$I_B = \int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-nx}x^3dx \tag{8}$$

連續利用部份積分得

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^3dx = \frac{3}{n}\int_0^\infty x^2e^{-nx}dx = \frac{3\cdot 2}{n^2}\int_0^\infty xe^{-nx}dx$$
$$= \frac{3\cdot 2\cdot 1}{n^3}\int_0^\infty e^{-nx}dx = \frac{3!}{n^3}\times\frac{1}{n} = \frac{3!}{n^4} \tag{9}$$

故 $$I_B = 3!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 3!\zeta(4) \tag{10}$$

上式中ζ(4) 係 s = 4 之黎曼ζ函數ζ(s)，其定義如下[2]

$$\zeta(s) \equiv \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \quad , \qquad s>1 \tag{11}$$

上式定義中之無窮級數只有當 s > 1 時方爲收斂。其近似值可由無窮級數前幾項之和得到，例如由前十項之和即可得到ζ(4)之有效數値至第四位 ζ(4) =1.082…。

當 s 爲偶數時， ζ(s) 之精確值可利用傅立葉級數求得。以ζ(4)爲例，我們首先在 $-\pi \le x \le \pi$ 之範圍求出 $f(x)=x^2$ 及 $f(x)=x^4$ 之傅立葉級數

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1^\infty (-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \tag{12}$$

$$f(x) = x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_1^\infty (-1)^n\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4}\right)\cos nx \tag{13}$$

令 $x=\pi$ 代入 $f(x)=x^2$ 之傅立葉級數即得

$$\zeta(2) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{14}$$

再用 $x=\pi$ 代入 $f(x)=x^4$ 之傅立葉級數得

$$\frac{4}{5}\pi^4 = 8\pi^2\zeta(2) - 48\zeta(4) \tag{15}$$

將ζ(2)值代入得 $$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \tag{16}$$

故 $$I_B = 3!\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \qquad (17)$$

$\zeta(4)$ 之值亦可由下法快速求得.設函數 $f(x)$ 之傅立葉級數爲

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx + \sum_1^{\infty} b_n \sin nx$$
$$(-\pi < x < \pi) \qquad (18)$$

則

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0{}^2}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2) \qquad (19)$$

上式在數學中稱爲帕斯維爾等式 (Parseval's identity)， 在物理學則叫做能量定理 (energy theorem)，因爲其物理意義可解釋爲一個波之總能量等於其各傅立葉分量能量之和 [3] 。令 $f(x) = x^2$ 並將其傅立葉級數展開之係數代入帕斯維爾等式得

$$\frac{2}{5}\pi^4 = \frac{2}{9}\pi^4 + \sum_1^{\infty}\frac{16}{n^4} \qquad (20)$$

故

$$\zeta(4) = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad (21)$$

三、黎曼 ζ 函數與白努利函數

黎曼 ζ 函數與白努利函數有密切關聯，當 s 爲偶數時， $\zeta(s)$ 之值亦可由白努利數求得。白努利函數 $B_n(s)$ 及白努利數 B_n 之定義如下[2]

$$\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\frac{x^n}{n!} \qquad (22)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \qquad (23)$$

換言之，白努利數 B_n 係 s 等於零時之白努利函數值

$$B_n = B_n(0) \qquad (24)$$

例如

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \qquad (25)$$

$$B_4 = B_4(0) = -\frac{1}{30} \qquad (26)$$

將方程式(23)連續微分得

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)\right]_{x=0} \qquad (27)$$

又經由一些簡單的運算可導出下列遞推關係式 (recursion relations)

$$N - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{N} B_{2n}\binom{2N+1}{2n} \qquad (28)$$

$$N - 1 = \sum_{n=1}^{N-1} B_{2n}\binom{2N}{2n} \qquad (29)$$

上式中

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \qquad (30)$$

由方程式(27)即可求得 $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}$。將此二值代入方程式(27)，即可看出 $B_{2n+1}=0,(n\geq 1)$。當 $B_2=B_4=...=B_{2N}$ 為已知時，利用遞推關係式很容易求得 $B_{2(N+1)}$ 之值。例如用 $N=2$ 代入方程式(29)得

$$1=B_2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad , \quad 故 B_2=\frac{1}{6} \tag{31}$$

再令 $N=3$ 代入得

$$2=B_2\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}+B_4\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \quad , \quad 故 B_4=-\frac{1}{30} \tag{32}$$

經由複變函數理論之解析延續 (analytic continuation)，由方程式(23)吾人得到下列泰勒級數

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s}{s!}z^s \tag{33}$$

故

$$B_s=\frac{s!}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{z}{e^z-1}\frac{dz}{z^{s+1}} \tag{34}$$

上式中之 C_0 係依反時針方向繞著原點之封閉路徑，且 $|z|<2\pi$。將積分路徑變形並利用餘數定理 (theorem of residues) 即可得到當 $s\geq 2$ 時

$$B_s=0 \quad \text{(s odd)} \tag{35}$$

$$B_s=-\frac{(-1)^{s/2}2s!}{(2\pi)^s}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^s} \quad \text{(s even)} \tag{36}$$

因此當 $s=2n$ 為偶數時，我們得到柏努立數與黎曼 ζ 函數之關係如下

$$B_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \tag{37}$$

此關係式係由數學家歐拉 (Euler) 所發現。由此式很明顯可看出當 $n\to\infty$，$|B_{2n}|\to\infty$。白努利數經常出現在數論 (number theory) 當中。且有一個數論方面的定理說

$$B_{2n}=A_n-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}-...-\frac{1}{p_k} \tag{38}$$

其中 A_n 為整數，$p_1,p_2,...,p_k$ 為質數。
例如

$$B_6=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42} \tag{39}$$

在許多超越函數的無窮級數展開都會用到白努利數。我們的目的則在利用方程式(37)求出黎曼 ζ 函數之值，例如將 $B_2=\frac{1}{6}, B_4=-\frac{1}{30}$ 代入即得 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}, \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$。

四、費米子能量密度之計算

一旦玻子能量密度之公式已知，費米子之能量密度可用下述之技巧快速導出[4]。根據方程式(4)相對論性費米子之能量密度 ρ 可寫爲

$$\rho = \frac{gT^4}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x+1} = \frac{gT^4}{2\pi^2} I_F \tag{40}$$

其中

$$I_F = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x+1} \tag{41}$$

將 I_B 及 I_F 之積分式相減得

$$I_B - I_F = \int_0^\infty \frac{2x^3 dx}{e^{2x}-1} \tag{42}$$

令 $y=2x$ 得 $I_B - I_F = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y-1} = \frac{1}{8} I_B$ (43)

故

$$I_F = \frac{7}{8} I_B \tag{44}$$

即 $\rho = \frac{7}{8} g \frac{\pi^2}{30} T^4$ (相對論性費米子) (45)

方程式(44)很容易推廣爲[5]

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x+1} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x-1} \tag{46}$$

由此式可知當自旋自由度相同時，費米子數目密度等於玻子數目密度乘以 $\frac{3}{4}$ 。

我們都知道早期宇宙之演化情形主要由各種相對論性粒子之能量密度及數目密度來決定，故將其公式整理如下:

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} gT^4 (Bosons) \\ \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30} gT^4 (Fermions) \end{cases} \tag{47}$$

$$n = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} gT^3 (Bosons) \\ \frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2} gT^3 (Fermions) \end{cases} \tag{48}$$

其中能量密度公式之 $\zeta(4)$ 已用精確值 $\pi^4/90$ 代入，而數目密度中之 $\zeta(3)$ 之近似值爲 $\zeta(3) \approx 1.202$ 。

五、黎曼 ζ 函數與解析數論

黎曼函數 $\zeta(s)$ 在解析數論方面也扮演著一個很重要的角色，這是因爲經由解析延續，$\zeta(s)$ 成爲複變數 s 之複函數，而數論中質數的漸進分佈則與黎曼 ζ 函數等於零的複數根有直接的關係。黎曼曾提出一個有名的猜想 (Riemann's conjecture): 除了 $s = -2, -4, \ldots$ 等實數根之外，所有黎曼 ζ 函數有意義的根(指複數根)均落在 $\sigma = \mathrm{Re}\, s = 1/2$ 之臨界線上 (critical line)。黎曼猜想的證明十分困難, 1900 年在巴黎舉行的第二屆國際數學家會議，著名德國數學家希爾伯特 (David Hilbert) 提出 23 個重要而尚未解決的數學問題，他預測這些問題的研究將構成二十世紀數學的主流，希爾伯特所列的第八個問題就是黎曼猜想。可惜事隔一百年，黎曼猜想迄今仍未獲得證明[6]。不過研究顯示至少最前面十五億個根都滿足黎曼的猜想，也就是說它們均落在臨界線上。黎曼 ζ 函數不僅在解析數論方

面扮演著重要的角色，最近的研究更顯示出此函數在臨界線上根的分佈情形和混沌理論（chaos）有密切的關聯[2]。

提到黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866)，這位十九世紀出生在德國漢諾瓦之數學家，人們總會聯想到他在數學上另外兩大貢獻：他在 1851 年的博士論文 "Foundations for a general theory of a complex variable" 中建立了複函數黎曼面 (Riemann surfaces) 之理論基礎；及在 1854 年在哥廷根大學題爲 "On the Hypothesis That Form the Foundations of Geometry" 的就職演講，他建立了一門新數學即黎曼幾何(Riemannian geometry)，此爲後來愛因斯坦研究廣義相對論時之數學基礎[7]。可惜黎曼因得了肺病，英年早逝，否則其在數學上之貢獻當不止於此。

參考資料 ：

[1] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (Addison –Wesley, 1990).

[2] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, forth edition 1995).

[3] R.P.Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics,* Vol. 1, Chap. 50, (Addison-Wesley, 1965).

[4] D.W. Sciama, *Modern Cosmology and the Dark Matter Problem,* (Cambridge University Press, 1993).

[5] R.N. Mohapatra and P.B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics,* (World Scientific, 2nd edition 1998).

[6] LB. Boyer, *A History of Mathematics,* (Princeton University Press, 1985).

[7] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation,* (W.H. Freeman and Company, 1973).