捕捉波斯氣的集體共振模

吳文欽
國立台灣師範大學物理系

摘要

集體共振模是研究多粒子物理系統的一個重要課題。在本文中我們介紹，當溫度高於波斯–愛因斯坦臨界點，集體共振模在捕捉波斯氣的情形，包括共振模的色散關係及其相對應的密度振盪變化。

一、前言

經過幾十年的努力，終於在 1995 年[1]在捕捉銣(Rb)原子氣中觀察到波斯-愛因斯坦凝結(Bose-Enistein condensation 簡稱 BEC)的現象。隨之打開的是對原子波斯凝結體(atomic Bose condensate)全新全面的研究。不論從實驗或理論的角度來看，弱交互作用(weakly-interacting)的波斯凝結氣體都是近期的一個重要研究課題。

集體共振模(collective modes)是研究一多粒子物理系統的重要問題。透過集體共振模的尋找，瞭解其以何種形式出現，它的色散關係(dispersion relation)，它的衰減(damping)或生命期(life time)情形，可以直接瞭解組成該系統的粒子或準粒子(quasiparticle)之間交互作用的情況。

對捕捉波斯氣而言，過去五年已有許多與集體共振模相關的研究工作[2]。這些工作與以往很不相同的地方在於以前考慮的波斯系統都是空間中均勻的(uniform)，而新的捕捉波斯系統，由於處在不均勻(non-uniform)的外磁場產生的位能阱下，絕大部份的物理量都是空間的函數，也就是說會隨空間而變。

一般量子系統中的集體共振模可區分成兩種[3]：一種是弱碰撞模(collisionless modes)；另一種是強碰撞模，又俗稱爲液動模(hydrodynamic modes)。前一種共振模是由於系統本身的動力平均場(dynamic mean field)所造成與踫撞無關。所謂的第零聲(zero sound)就是這種共振模。最近在捕捉波斯凝結氣系統裏，有一些這方面的理論研究[4,5]；這些理論預測與實驗結果[6]相當穩合。基本上這些理論都是從 Gross-Pitaevskii 方程式[7]開始，在零溫($T=0$)下，考慮凝結體受到自己 Hartree 場的影響所產生的共振行爲。當然這一類方法也可以推廣到定溫($T\neq 0$)的情形。

而液動模是當系統經歷很強的碰撞並達到局部熱平衡(local thermodynamic equilibrium)所形成

的。譬如說第一聲(first sound)及第二聲(second sound)就屬於這一類共振模[8]。本文主要介紹的，即是這一類的集體共振模。在第二章中，我們從液動模型(hydrodynamic model)開始，利用守恆定律推導當溫度 $T > T_{\mathrm{BEC}}$(波斯-愛因斯坦臨界溫度)時，捕捉波斯氣的運動方程式。(我們不討論 $T < T_{\mathrm{BEC}}$ 的情況，因爲此時正常流體(normal fluid)與超流體(superfluid)同時存在，情況比較複雜；有興趣的讀者可以參考[9,10])。此外爲求簡單起見，我們只考慮球形對稱(isotropic)的位能阱的情形[雖然一般實驗室設計的位能阱大都是橢球形對稱的(anisotropic)]。

二、液動模型

Kadanoff 及 Baym[11]曾仔細研究過均勻古典系統的液動模，我們可以推廣他們的方法來考慮一個放置在一位能阱 $U_0(\mathbf{r})$的量子波斯系統。當一不均勻的(nonuniform)波斯氣受到一微擾 $\delta U(\mathbf{r},t)$的作用，由於內部激烈踫撞達到局部熱平衡，它們的分布情形可用下面的波斯分布方程來描述

$$f(\mathbf{p},\mathbf{r},t)=\frac{1}{e^{\beta(\mathbf{r},t)\{[\mathbf{p}-m\mathbf{v}(\mathbf{r},t)]^2/2m-\mu(\mathbf{r},t)\}}-1}. \qquad (1)$$

在(1)式中，$[k_B\beta(\mathbf{r},t)]^{-1}\equiv T(\mathbf{r},t)$、$\mu(\mathbf{r},t)$、及 $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$是空間與時間皆相關的*局部*溫度、“化學能(chemical potential)”、及速度。把(1)式代入局部粒子數密度 $n(\mathbf{r},t)$、粒子流 $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$、及能量密度 $\varepsilon(\mathbf{r},t)$滿足的守恆定律(conservation law)中，可以很容易得到決定 $T(\mathbf{r},t)$、$\mu(\mathbf{r},t)$、及 $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$的運動方程式。以上所提到的步驟，針對均勻的古典氣體，在[11]中的第 56-58 頁有詳細介紹。

在微小擾動下，不均勻系統的局部溫度、化學能、及速度可以寫成

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r},t) &= T_0+\delta T(\mathbf{r},t) \\ \mu(\mathbf{r},t) &= \mu_0(\mathbf{r})+\delta\mu(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r},t) &= \delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t). \end{aligned} \qquad (2)$$

雖然系統是不均勻的，它們的平衡態(equilibrium state)溫度 T_0是均勻的，而平衡態局部速度 $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})=0$ (也就是說，沒有運動)。(我們習慣用指數 0 表示平衡態的值。)計算到 $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$的一階近似，$n(\mathbf{r},t)$、$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$、及 $\varepsilon(\mathbf{r},t)$的守恆定律可改寫成下列的運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= -\nabla\cdot[n_0(\mathbf{r})\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)] \\ mn_0(\mathbf{r})\frac{\partial \delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= -[\nabla P(\mathbf{r},t)+n(\mathbf{r},t)\nabla U_0(\mathbf{r})] \\ \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= -\nabla\cdot[\frac{5}{3}\varepsilon_0(\mathbf{r})\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)] \\ &\quad - n_0(\mathbf{r})\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla U_0(\mathbf{r}), \end{aligned} \qquad (3)$$

其中 $P(\mathbf{r},t)$是局部壓力，而

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r},t) &= \int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}f(\mathbf{p},\mathbf{r},t) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{m}f(\mathbf{p},\mathbf{r},t) \\ \varepsilon(\mathbf{r},t) &= \int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{2m}f(\mathbf{p},\mathbf{r},t). \end{aligned} \qquad (4)$$

式子(3)中正比於$\nabla U_0(\mathbf{r})$的項直接反應了位能阱的作用。

將(1)式代入(4)式，可以直接解出

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= n_0(\mathbf{r})\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \\ n(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\Lambda^3}g_{3/2}(z) \\ P(\mathbf{r},t) &= \frac{2}{3}\varepsilon(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\beta(\mathbf{r},t)}\frac{1}{\Lambda^3}g_{5/2}(z), \end{aligned} \qquad (5)$$

其中 $z(\mathbf{r},t)=e^{\beta(\mathbf{r},t)\mu(\mathbf{r},t)}$是所謂的局部熱平衡 fugacity，$\Lambda=[h^2/2\pi mk_BT(\mathbf{r},t)]^{1/2}$ 是熱 de Broglie 波長，還有 $g_n(z)=\sum_{l=1}^{\infty}z^l/l^n$ 是著名的波斯-愛因斯坦函數[12]。

式子(5)中的熱力學函數，當考慮其靜態(static)局部平衡值時，可做下列的設定：$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=0$、$T(\mathbf{r},t)=T_0$ 及 $z(\mathbf{r},t)=z_0\equiv e^{\mu_0(\mathbf{r})/k_BT}$，其中 $\mu_0(\mathbf{r})=\mu-U_0(\mathbf{r})$ [μ 是化學能]。此時溫度在空間中到處都是 T_0。這些結果是由著名的半古典近似(semiclassical approximation)[13]所得到，其適用範圍在於當位能阱的能階差比 k_BT_0 小很多。

讀者可能覺得奇怪，爲何我們考慮液動模型卻一直沒有提到粒子間的作用力？原因是這樣：雖然激烈踫撞造成局部熱平衡，但對一粒子濃度稀(dilute)的氣體，我們可以使用以上守恆定律導出的運動方程式[(3)式]，在最低階的近似下，把作用力忽略掉。

利用式子群(3)及(5)，我們可得到一個局部速度波動 $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$的封閉方程式(closed equation)(參考資料[14]有下式的推導)

$$m\frac{\partial^2\delta\mathbf{v}}{\partial t^2}=\frac{5}{3}\frac{P_0(\mathbf{r})}{n_0(\mathbf{r})}\nabla(\nabla\cdot\delta\mathbf{v})-\nabla[\delta\mathbf{v}\cdot\nabla U_0(\mathbf{r})]-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\delta\mathbf{v})\nabla U_0(\mathbf{r}),\tag{6}$$

其中 $\delta\mathbf{v}\equiv\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$，還有

$$\frac{P_0(\mathbf{r})}{n_0(\mathbf{r})}=k_BT_0\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)}.\tag{7}$$

從(6)式中可以清楚看到，不均勻波斯氣的平衡態性質只透過第一項[也就是(7)式]進入(6)式。另外值得注意的，(6)式是向量式，代表一個包含 $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$三個分量的耦合式。

三、液動共振模

(6)式的解將給我們所有捕捉波斯氣的液動共振模。首先我們可以利用(6)式來檢查均勻氣體，也就是把位能阱關掉的情況。當 $U_0(\mathbf{r})=0$，系統由不均勻轉成均勻，此時(6)式的解是平面波(plane wave)，$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\delta\mathbf{v}_\omega(\mathbf{k})\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$，其中 $\delta\mathbf{v}_\omega(\mathbf{k})\propto\hat{\mathbf{k}}$。此解即是縱向(longitudinal)的液動聲波(hydrodynamic sound wave)；其色散關係是 $\omega^2=c^2k^2$，其中聲速可由下式決定

$$c^2=\frac{5}{3m}\frac{P_0}{n_0}=\frac{5}{3}\frac{k_BT_0}{m}\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)}.\tag{8}$$

在古典極限(classical limit)下($z_0=e^{\mu/k_BT_0}\to 0$)，(8)式即給定著名的 Laplace 的結果[12]，此時 $c_{cl}^2=5k_BT_0/3m$；當 $T=T_{BEC}$時，$\mu=0$ ($z_0=1$)，這時 $c^2=0.51c_{cl}^2$。

當位能阱存在時($U_0(\mathbf{r})\neq 0$)，我們首先嘗試下列特別且重要的解型：$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\delta\mathbf{v}_\omega(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}$。同時我們先考慮 $\delta\mathbf{v}$ 的通量爲零($\nabla\cdot\delta\mathbf{v}=0$)時的情況。此時(6)式將簡化成

$$-m\omega^2\delta\mathbf{v}_\omega(\mathbf{r})=-\nabla[\delta\mathbf{v}_\omega(\mathbf{r})\cdot\nabla U_0(\mathbf{r})].\tag{9}$$

由於這時(6)式的第一項消失了，(9)式的解對古典氣體與 $T\langle T_{BEC}$的波斯氣體無異。此外，我們也可以證明上述零通量的解對應到一個等溫的振盪(isothermal oscillation)[14]。

考慮一個球形對稱位能阱，$U_0(\mathbf{r})=m\omega_0^2r^2/2$，我們可以得到(9)式的正交模式(normal mode)的解

$$\delta \mathbf{v}_{\omega}(\mathbf{r}) \propto \nabla[r^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)] \tag{10}$$

及 $\omega=\sqrt{l}\omega_0$ ($l\langle 1$)。(10)式中 Y_{lm} 是球諧函數(spherical harmonics)。結合(10)式及(3)式可以得到相對應的密度振盪$\delta n(\mathbf{r},t)=\delta n_{\varpi}(\mathbf{r})e^{-i\varpi t}$，其中

$$\delta n_{\omega}(\mathbf{r}) \propto r^{l-1} Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{\partial n_0(\mathbf{r})}{\partial r}. \tag{11}$$

在古典極限下[13]，

$$n_0(\mathbf{r}) = n_0(\mathbf{r}=0)e^{-m\omega_0^2 r^2/2k_B T_0}, \tag{12}$$

此時$\delta n_{\omega}(\mathbf{r}) \propto r^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) n_0(\mathbf{r})$。以上所考慮的零通量模一般稱之爲“表面模(surface modes)”。值得注意的是，我們所得到的表面模的色散關係$\omega=\sqrt{l}\omega_0$和自由簡諧振子(harmonic oscillator)的色散關係$\omega=l\omega_0$不同。

接下來我們討論(6)式的壓縮模(compression mode)解。對一個球形對稱系統，我們可以把$\delta\mathbf{v}_{\omega}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{r}$代入(6)式來得到單極(monopole)振盪解。其對應的頻率是$\omega=2\omega_0$。在古典極限下，我們也可以得到相對應的密度振盪函數$\delta n_{\omega}(\mathbf{r}) \propto (3 - m\omega_0^2 r^2/k_B T) n_0(\mathbf{r})$。由於$\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_{\omega}(\mathbf{r})=$constant，表示(6)式第一項沒有貢獻，此時上面的單極壓縮模解與系統是否是古典或量子無關，因爲波斯量子統計只跟這一項有關。

當然，當(6)式的第一項有作用時，還有另外的解存在(此時第一項的 $P_0(\mathbf{r})/n_0(\mathbf{r})$[參閱(7)式]與溫度 T 及 $\mathbf{r}$ 都有關)，不過我們不在這裏討論這種情況。

四、結語

在本文裏我們簡介捕捉波斯氣的集體液動模。當溫度 $T > T_{\mathrm{BEC}}$時，(6)式的解提供了捕捉波斯氣所有集體共振模應有的振盪行爲及其色散關係。我們介紹了表面模及單極壓縮模的情形，並在適當地方與古典氣體的結果作比較。

五、參考資料

[1] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).

[2] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys.**71**, 463 (1999) and references therein.

[3] D. Pines and P. Nozières, *Theory of Quantum Liquids* (W.A. Benjamin, New York, 1966), Vol.1, Chap. 1.

[4] S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).

[5] M. Edwards *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1671 (1996).

[6] D.S. Jin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996).

[7] L.P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646 (1961) [Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)]; E.P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961); J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).

[8] P. Nozières and D. Pines, *Theory of Quantum Liquids* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990), Vol.2, Chaps. 7 and 10.

[9] E. Zaremba, A. Griffin, and T. Nikuni, Phys. Rev. A **57**, 4695 (1998).

[10] V.B. Shenoy and T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. **80**, 3895 (1998).

[11] L.P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (W. A. Benjamin, New York, 1962), Chap. 6.

[12] K. Huang, *Statistical Mechanics* (J. Wiley, New York, 1987), 2nd ed., p.185.

[13] See, for example, T.T. Chou *et al.*, Phys. Rev. A **53**, 4257 (1996); V. Bagnato *et al.*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).

[14] A. Griffin, W.C. Wu, and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **78**, 1838 (1997).