·人物專訪·

幾何與物理

丘成桐

在今天的演講中，我想跟各位談談數學和物理的關係。我不是物理學家，所以我想從數學家的觀點來討論這個問題，並提出一些我本身的看法。

基本上，數學與物理，就出發點而言，物理學家和數學家研究的對象在很多方面是很接近的，對於這一點，物理學家不見得曉得，數學家可能也不大同意。其實，數學上要求的定理（證明的定理）重新用不同的方法表現後可以變成物理上有用的工具，歷史上就有很多這方面的例子。不過，對數學家來講，我們研究的對象和物理學家畢竟是不同的。我們研究"自然的對象"，而數學家所謂的自然，往往是物理學家無法接受的。我想先舉一個例子：

大概在五年前，我到紐約去訪問數學家D. Sullivan（本來從事拓樸的研究，後來研究混沌），恰好也遇上另一位物理學家，也是數學家的Feigenbaum（以研究混沌出名），在餐館吃飯時，桌上有一杯水，我說，水是很自然的物質。Sullivan講，我不這麼認爲，對我來講，黎曼面比水更自然，我做複變數動力系統問題中所有的工具、對象都是黎曼面。Feigenbaum是同意我的說法的。我知道Sullivan不是故意要和我們抬槓，他的意思眞的是這樣的，他研究中接觸到的都是黎曼面，而他使用這工具到某種熟練程度，就好像這是他精神的一部份，所以他認爲黎曼面自然，可見物理學家思考的對象和數學家不一定是一樣的。

我想，數學家一定同意黎曼面是很重要的數學課題，但是，說到它"和水一樣基本"，很多數學家可能不願意接受這種講法，然而，我再舉一個較淺的例子，如一個球（Sphere），我們可能接受"球和水一樣基本"的講法，因爲球的觀念，對我們做幾何的人實在是最基本的。所以，就研究的對象而言，物理學家的觀點和數學家有一定的不同。

數學家觀念的形成，主要由兩個課題出發：

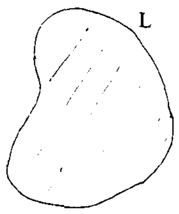
一、自然(Natural)：自然現象永遠是數學研究的起源，不論是物理上基本定律，或是工程上的應用，我們一樣感興趣，如流體力學、古典力學、甚至計算機的發展，對於數學都有很大的影響，數學家接受它們爲自然的現象，不管天然的或人爲的。

二、優美(Beauty and Elegent)：從美的觀點來做幾何的研究。譬如描述一個幾何觀念就是最簡單的"美"。美不是一下子能看得到的，這往往是從自然現象得到的美。

一個好的數學通常都跟現象有某些相關，歷史上也鮮有違反的例子，證了一個定理，過了十年二十年後將自然會在物理或工程中出現。對於這種相關性的發生，我想主要是好的數學家從來不脫離自然現象，他們找尋（定義）自然中的美，敘述是否簡潔明白，決定它是否爲一個好的數學。一個數學是否優美是很主觀的，但是，眞正好的觀念將會得到普遍的同意，因爲一旦有了爭執，表示未達到眞正的美。

從上述的觀點來看幾何的發展。埃及時代，平面幾何開始發展，但始終無法系統化，有些敘述，雖然經後人研究是正確的，但始終無法共同性地放在一起；到了希臘時代，有了公理後，才建立了共同的語言，用公理化的方式表達之後，數學才得以向前發展。數學和物理一樣，常常作很多假設，但我們更注重它的公理化，以推到更新的結果，去了解新的現象。這跟物理是一樣的精神，只是數學較公理化一些。

數學家和物理學家研究的方法是不同的，舉例來說，歐氏幾何裡有個問題，將一條繩子，長度L，圍成一塊面積，繩長固定，圍出最大面積時，形狀是個圓，即



$$A \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

雖然此保測不等式很早就曉得，二千多年以來，這個問題對於幾何學家仍是很重要的。這種情況可能物理學家很難理解。爲什麼我們對這個問題那麼感興趣？原因在於我們發現了解不等式是了解平面幾何的基本關鍵。研究球面，試著去做不等式的研究，要求球面面積固定或是邊界固定，將得到不同的幾何圖形。尤其在高維的理論裏面，不等式是了解整體性拓樸和幾何上的關係之關鍵。研究不等式的工作將對了解理論模型有幫助，同時每個證明對於理論都會有新的貢獻。所以數學家不但對“事實”有興趣，也對證明有興趣，更希望能推廣到一般的空間、物理學家對於這個問題就不太計較。

我們發現，在研究平面幾何時，不但要研究其本身，爲研究平行公理，還要研究非歐幾何，非歐幾何的引起是爲了研究平行公理，因爲，唯有推廣到更高幾何，才能將本身的幾何充分了解。發展非歐幾何後，又不能停頓在兩個幾何的階段，一定要深入到黎曼幾何裡去，它的過程本身完全與物理無關，我們的研究，只爲了了解幾個很根本的觀念。

對物理學家而言，可能了解一些事實後就不再深究，但是，數學家會想從研究平面幾何裏，找到一些想法來研究新的幾何，研究新的幾何後，發現平面幾何的事實更容易去理解、推廣。黎曼幾何剛發展的時候好像沒有用處，但是，到了廣義相對論，就非用到黎曼幾何不可，它又跟廣義相對論起了關係。

物理有時也會倒過來影響數學，如廣義相對論和黎曼幾何的語言是相同的，可是本質上卻不一樣。有些做黎曼幾何的人想用一種純黎曼幾何的考慮去做廣義相對論，結果卻對廣義相對論沒有貢獻，而且得到完全錯誤的結果，反而一些研究廣義相對論的人引用許多方法對於黎曼幾何的發展影響很大，這就是個很好的例子。

上述的例子也告訴我們，研究的觀念和對象一定要拿捏得當，才不致白費工夫。愛因斯坦需要黎曼幾何的語言，卻沒有因爲語言一樣，就把它們看成是一樣的對象，因爲廣義相對論是研究重力場的物理，不是將黎曼幾何搬過來，就說我們對於廣義相對論已經了解，須視對象來作研究。相對地，由於物理學家的對象是對的，物理學家對幾何觀念的研究方法，給了理論幾何學家很大的啓發，而理論幾何學家開始對廣義相對論的問題想清楚後，黎曼幾何才又得以向前邁進。

1976年我跟我朋友作了一個研究，當時我們也不曉得這在廣義相對論上是個重要的問題，這是個有關質量的問題。廣義相對論中愛因斯坦方程式是非線性的，不是古典中的線性關係，質量是否爲正的問題在廣義相對論內非常重要。當時我們都不了解這是什麼問題，但大致知道怎麼定義，定義之後，我們卻對於物理學家寫下的一些方程式感到莫名奇妙。如，

$$Z_\mu = h - \Sigma h_{ij} - \Sigma (h_{ii})^2$$

$$j\,i = \sum_i h_{ij,i} - \sum_j h_{jj,j}$$

這方程式對數學而言是三維流形方程，然而，我

們看不懂這東西，不知道爲什麼會有這個期望值。這個方程式物理上應該是對的，局部質量大於或等於零應導致總體質量也是大於或等於零，否則質量的定義就有問題，廣義相對論的基礎也會有某種程度的困難。我們採取的方式是用純量曲率來考慮，要求純量曲率大於或等於零可以決定總體質量是否大於或等於零。用這種方式將一個物理問題變黎曼幾何的問題，如此一來，從前的理論可以用到裡面去。我們又發現，質量的問題和剛剛的保測不等式有很密切的關係。回頭看來，從廣義相對論的問題上出發，三維的黎曼幾何問題和保測不等式又起了密不可分的關連性。

保測不等式從古老的理論開始，在理論幾何內千變萬化，在廣義相對論中，亦可以找到它的物理意義，用保測不等式加上附加的觀念可以解決 $h_{ij}=0$ 的情形（質量大於或等於零的問題）。整個過程中，我們的目的是純幾何的，從幾何的觀點來看，方程式也是相吻合的。

溯其根源，黎曼幾何的發展，受到廣義相對論的影響也有好處，因爲，如果沒有物理學家，無法曉得式子是否正確。到目前爲止，這個式子除了用物理觀念來解釋它是對的外，還無法知道它是不是對的，也就是說不曉得是否爲零。我們覺得這兩組方程式是很鬆散的組合，怎麼可能得到大範圍的結果？物理學家相信它是對的，也找不到反例，後來，我們終於證明了這個式子，也是從物理上得來的靈感。

在物理的領導下，常常可以容易地找到什麼東西應該是正確的，可是物理學家往往不能提出很好的證明，舉例來說，超弦理論的發展中，Witten有很大的貢獻，他找到的東西，物理學家把它當作是一種理論，但是數學家認爲他是在猜測，因爲他用了很多由量子場論所產生的假設，然而，Witten得到的結果，是在拓樸學和幾何內很深奧的猜測。

我個人認爲，也許物理學家的直覺是比較敏銳的，譬如在數學上，我們研究古典變分理論時，建立了很多變分理論問題，如一維空間的畸異點問題，但往往得不到正確的結果。在物理上，弦論基本上可以看作是無窮維空間的畸異點理論，物理學家也得到了正確的結論。以往數學家對於無窮維空間的直覺不夠，在這方面的反應反而不如物理學家。

這幾年來，弦論的發展對代數幾何也有很大的幫助，舉例來說，我今年四月在柏克萊MSRI參加會議，討論鏡射對稱的問題。當時有個很重要的問題是：

考慮五個單複變數的五次方和爲零，也就是

$$\sum_{i=1}^{5} z_i^5 = 0 \qquad z_i \in D$$

較一般化的寫法，以把它寫成如下的多項式，$P(z_1, z_2, \cdots, z_5)=0$，是一個五次方的齊次多項式。今考慮 z_i 是變數t的k次有理式，（即 $Z_i=\frac{Ai(t)}{Bi(t)}$，其中 A_i 和 B_i 是多項式，且 $|\deg A_i - \deg B_i| = k$），則 $P(z_1, \cdots, z_5) = 0$只有有限多組解。設其解的個數爲 a_k。

對於求算 a_k 的這個問題，數學家用代數幾何方法已可推導 a_1，a_2。今年初，他們又找到了 a_3。

對這個問題的探討，物理的弦論中提供了另外一個很好的解決方式。在弦論中，可以找到一個母函數 $G=\sum_n b_n n^3 e^{-nt}$ 來求解 b_n。數學家起初被發現他們求得的 $a_1 = b_1$，$a_2 = b_2$，$a_3 \neq b_3$，因此覺得物理的弦論沒道理，後來才察覺不等的產生原來是有個地方弄錯了，當時被認爲是可笑的事。

從物理學家得到的觀念，沒有什麼道理要懷疑它錯，我們希望它總是對的；現在存在的問題是，有沒有什麼辦法可以用數學的方式來證明物理學家得到的數學是對的。從古典方法來講，數學家是一步一步地爬，物理學家是一下子就全部都曉得了，所以我們不能否認物理學家對數學所作的貢獻，可是，我想，到最後要明它是對的時，可能要規避物理學家的方法，也因數學家不一樣的研究方法，將有著和物理學家不同的貢獻。最後，我希望最好能在物理和數學裡找到統一。