

量子力學中的 vector potentials

洪在明

清大物理系副教授

最近楊振寧院士在清華演講時，提到證實vector potential A (而不光是磁場) 本身具有物理意義的Aharonov-Bohm effect (註1和2)。我在量力書上找到以下兩個有關的性質：

(a) 電子在磁場中從 \vec{r}_1 移到 \vec{r}_2 ，波函數 $\Psi(\vec{r})$ 會增加 $\frac{e}{c} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ 相位 (註2，從propagator的路徑積分表示式可以看出來)

(b) 如果磁場為零，但是 $\vec{A} \neq 0$ ，則 $\Psi(\vec{r})$ 可以表成 (註1)

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi^{(0)}(\vec{r}) \cdot \exp\left[\frac{ie}{c} \int^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}'\right] \quad (1)$$

$\Psi^{(0)}(\vec{r})$ 是沒有 \vec{A} 時的波函數。最直接的驗證是將這個解代入薛丁格方程式

$$\frac{1}{2m} \left(-i\nabla - \frac{eA}{c}\right)^2 \Psi + V\Psi = E\Psi \quad (2)$$

利用以下性質

$$\begin{aligned} \left(-i\nabla - \frac{eA}{c}\right)\Psi &= \exp\left[\frac{ie}{c} \int^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}'\right] \left[\left(-i\nabla - \frac{eA}{c}\right)\Psi^{(0)} + \Psi^{(0)} \left(-i\right) \left(\frac{ie}{c}\right) \vec{A}(\vec{r}) \right] \\ &= \exp\left[\frac{ie}{c} \int^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}'\right] (-i\nabla \Psi^{(0)}) \end{aligned} \quad (3)$$

可以推知 $\left(-i\nabla - \frac{eA}{c}\right)^2 \Psi = \exp\left[\frac{ie}{c} \int^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}'\right] (-\nabla^2 \Psi^{(0)})$ ；因此只要 $\Psi^{(0)}(\vec{r})$ 滿足

$$-\frac{\nabla^2}{2m}\Psi^{(0)} + V\Psi^{(0)} = E\Psi^{(0)}, \Psi(\vec{r}) \text{ 便會滿足(2)式。}$$

由於(3)式只在 $\nabla \times \vec{A} = 0$ 時成立，這限制了性質(b)的適用範圍；而且由於此時eigenvalues並不隨A改變，因此不管系統有沒有bound states，磁化率永遠為零。不過設想把電子限制在內外半徑分別為a,b的二維同心圓之間，在內圓加上一個垂直圓面的均勻磁場B；當選取symmetric gauge，並且設波函數呈 $R(r) \cdot e^{in\theta}$ 形式（n必須是整數），將推得R(r)滿足

$$\left[-\frac{1}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2mr^2} \left(n - \frac{eBa^2}{2c} \right)^2 \right] R(r) = E \cdot R(r) \quad (4)$$

接下來由邊界條件 $R(a) = R(b) = 0$ 可以決定eigenvalues E和n,B的關係。很自然地，我們預期E會和B有關（經由電腦數值分析，的確發現當B很小時，E大致以 B^2 增加），而和上述性質(b)的推導矛盾。和同仁討論後，結論Sukurai的性質(b)只在空間中沒有任何一個區域有磁場時才對（也就是必須為simply connected），亦即只適用於 \vec{A} 純粹來自gauge transformation（因此也才可藉由gauge transf. 幹掉 \vec{A} ）；所以嚴格來講，Sukurai在註1書上page 16接下去有關Aharonov-Bohm effect的討論是錯的。

感謝國科會計劃編號NSC84-2112-M007-013的支持，以及和陳義裕、吳玉書、吳天鳴、胡崇德和熊文凱教授們的討論。吳天鳴教授特別指出註3有類似的討論。

參考資料：

〔註1〕Advanced Quantum Mechanics, by J. J. Sukurai (AddisonWesley, Reading, 1967), p.16

〔註2〕Principles of Quantum Mechanics, by R. Shankar (Plenum, New York, 1981), p.507

〔註3〕Statistical Mechnics, by K. Huang (john Wiley & Sons, New York, 1987), pp.256