

# 多維空間、加速器現象

文/張敬民

## 摘要

在這篇文章中，我會介紹幾個多維空間的模型，以及它們在加速器的現象。包括了超大多維空間 (ADD 模型)，Warped 多維空間(Randall-Sundrum 模型)， $\text{TeV}^{-1}$  多維空間，及 universal 多維空間，和一個在 AdS 空間的五維大統一場論。

## 一、導論

粒子物理的標準模型，可以考慮是最成功的一個標準模型。經過三十多年的實驗考證，標準模型已被驗證到  $10^{-3}$ [1]。無論如何，作為一個理論學家，我們相信標準模型不會是最終的理論，原因如下：(一)標準模型有很多的參數，特別是費米子的重量，這跟味道問題有關。又為什麼只有三個家庭；(二)標準模型沒有把所有作用力合在一起；(三)Gauge Hierarchy 問題。在粒子物理中有兩個 scales，弱電 scale 及 Planck scale，它們之間相差 16-17 order of magnitude，這樣會導致 Higgs Boson 重量超大的修正，如此需要非常小的抵消，才可以有大概 100 GeV 的 Higgs boson 重量。

大家都有一個信念，那就是新的物理會在 1 TeV 左右時被發現，未來的 LHC 實驗，將會實現我們的夢想。

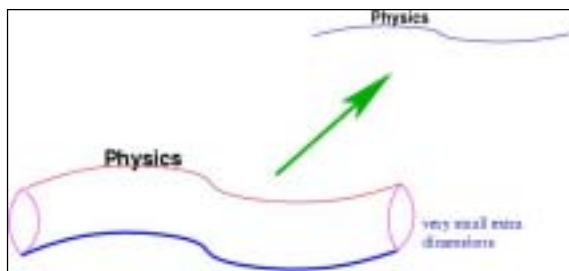
除了以上的考量，在其他領域上也告訴我們，標準模型其實是不足夠的。最轟動的莫過於微中

子，現在有了重量和相互震盪。從大氣與太陽微中子的實驗中，已證實微中子會相互變換(即震盪)，微中子本身亦有重量。另外，從很多天文及宇宙觀測中，幾乎可以肯定黑暗物質的存在，但我們對它的認識很少，不但不知道它是什麼粒子所組成，更談不上它可能在標準模型以內。在最近這幾年當中，藉著超新星的測距，宇宙微波輻射的量測，我們發現在宇宙中，存在著另一個更神秘的物質，是我們不能了解的，稱為"黑暗能量"，在標準模型以內，我們是無法解釋這個物質，標準模型也無法給予一個合理的解釋，為何宇宙重子比反重子多了許多。

以上各種原因，應該可以令人相信，在標準模型以外是存在著新物理。但是，這是什麼樣子的物理呢？現在還無人可以回答這個問題。不過，可以從一些基本的問題中，去尋求答案。

Gauge hierarchy 問題引發多個模型，超對稱便是一個典型的例子。這幾年，hierarchy 問題引發了多個多維空間的模型。為何我們相信在多維空間？

弦論和數學都告訴我們，空間是多維的，超弦論要存在於 10 或 11 維的空間。為何我們看不到這些在三維以外的空間呢？一個很簡單的原因，就是它們實在太少，我們的肉眼，以致於一切現有的儀器，都無法把它們分別出來。在圖一中，"Physics"是放在一個額外的座標上，但這個座標所描述的空間非常的小，因此在一段較遠的距離上觀察，都無法看到這個額外的空間。



圖一：說明為何看不到多維空間。

這篇文章會討論多個多維空間模型，及其引發的加速器現象。包括了(1)大多維空間(ADD 模型)，(2)warped 多維空間(Randall-Sundrum 模型)，(3) $\text{TeV}^{-1}$  大小的多維空間，(4)universal 多維空間，以及(5)一個在 AdS 空間的五維大統一場論模型。

## 二、ADD 模型

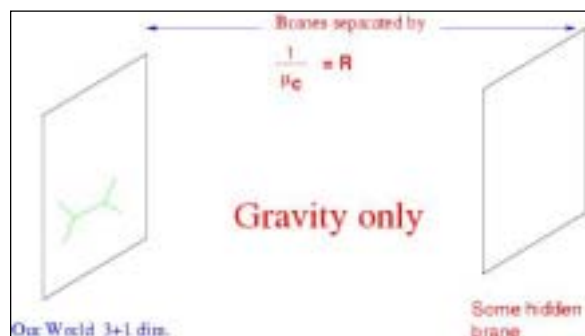
Arkani, Dimopoulos 和 Dvali [2]提出，如果只有引力存在於多維空間，這些多維空間可以非常大，可以大到 1mm。這樣的牛頓萬有引力，在 1mm 以下會有更改，但目前的引力實驗還未達到這個準確值。我們所看到的 Planck Scale  $M_{pl}$  變成一個可變的參數：

$$M_{pl}^2 \cong M_D^{n+2} R^n$$

在當中  $M_D$  才是這個模型中基本的 Planck Scale， $R$  是多維空間的大小。如果  $R$  真的是很大， $M_D$  就可以相當的小，可能會只有到 TeV，這樣就沒有 Gauge hierarchy 的問題了。在這模型裡，一般粒子都困在一片 3-brane 上，而只有引力子才可走到多維的空間。整個組合在圖二。這模型都有豐富加速器的現象，就是可以走出到多維的引力子。在三維的角度看來，存在於多維的引力子，就相當於一個 Kaluza-Klein tower，其重量譜是：

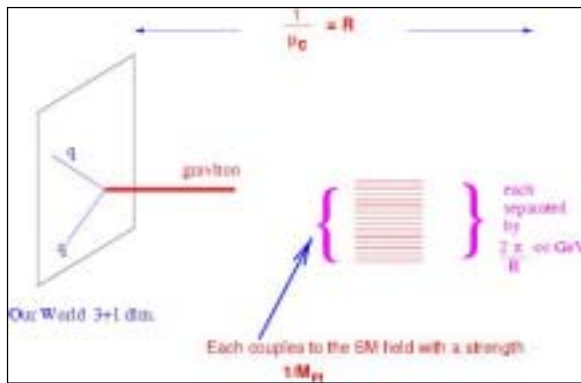
$$M_l = \frac{l}{R}, l = 0, 1, 2, 3 \dots$$

這譜之間的相距，只有  $10^{-4}\text{eV}$ ，所以在高能實驗中，好像是一個連續譜。



圖二：ADD 模型的整合。

ADD 模型的特點就是透過引力子。在高能實驗中，普通粒子可以碰撞產生引力子，而引力子可以有兩種可能性：(i)帶著能量及動量，走出多維空間，這樣在實驗中，產生了"失去能量"的作用，(ii)引力子可以返回 3-brane 上，跟標準模型的碰撞 amplitude，產生干擾，尤其在高能領域中，產生特別效應，如果可以準確的量度，便可以找到干擾效應。新作用的大小是  $1/\text{TeV}$ ，所以在高能實驗中可以看到。在圖三，可以瞭解引力子的作用。



圖三：ADD 模型中引力子作用。

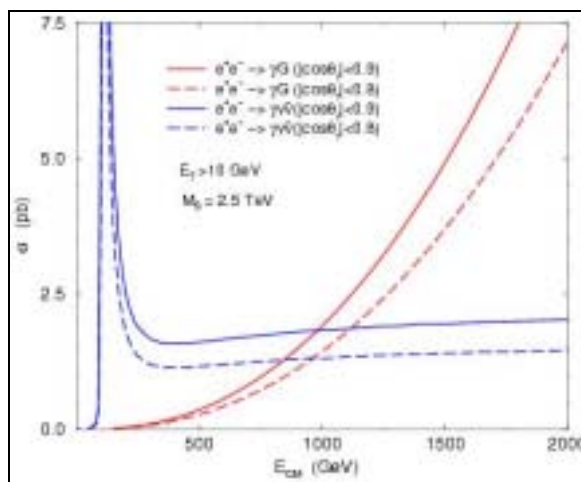
其中，較有趣的實驗，可能就是尋找單光子或單 jet 加上"失去能量"的。它們可以從：

$$e^+e^- \rightarrow \gamma(Z)G, \quad q\bar{q}(gg) \rightarrow gG$$

產生[3]。

在圖四：表達了  $e^+e^- \rightarrow \gamma G$  和  $e^+e^- \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}$

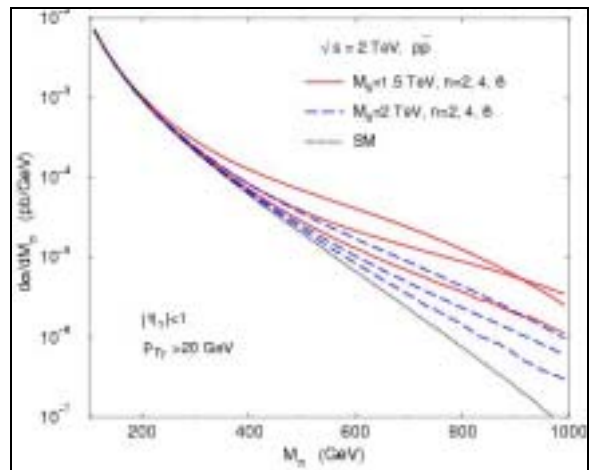
的碰撞切面，可以看到當能量( $E_{CM}$ )達到跟  $M_D$  有所大小時，引力子的作用可以超過標準模型的預測。



圖四：引力子所產生的不見能量與 SM 比較。

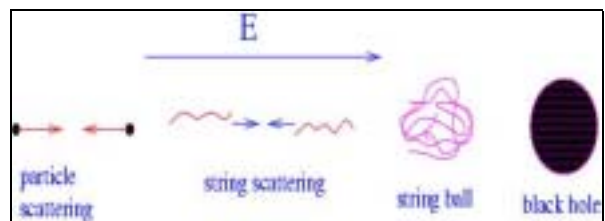
另外，引力子所引發的碰撞 amplitude 可以跟

標準模型的 amplitude 發生干擾現象：如在圖五所描述的  $p\bar{p} \rightarrow \gamma\gamma$ ，在高能領  $M_{\gamma\gamma} \geq 600$  GeV，干擾的效應遠大於標準模型所預測的[4]。



圖五：引力子干擾效應。

ADD 模型也有一個非常特別的性質，就是基本 Planck scale 可以只有 TeV。這樣在一些高能實驗中，如 CERH LHC，可以大大超過  $M_D$ ，而這樣可以產生一些量子引力的效應，如產生黑洞，弦球 (string balls)，及 P-brane[5, 6, 7]。在圖六中我們做了一個簡單的描述，在低能時，粒子的碰撞可以用粒子來代表，但當能量提高到接近，或者是超過  $M_D$ ，這時要用弦來代表碰撞的過程。



圖六：超越 Planck scale。

再當能量提到更高，弦變的相當活躍，加上高度的纏繞，成為弦球。再進一步弦球就會轉變成一個黑洞。所以當能量超越  $M_D$  時，以上的效應都可能發生。

在此，我短述黑洞與弦球的產生。黑洞的參數有：重量，角動量及帶電荷。在此只考慮沒有角動量及電荷的黑洞。黑洞的 Schwarzschild 半徑及 entropy 是[8]

$$R_{BH} = \frac{1}{M_D} \left( \frac{M_{BH}}{M_D} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left( \frac{2^n \pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$S_{BH} = \frac{4\pi}{n+2} \left( \frac{M_{BH}}{M_D} \right)^{\frac{n+2}{n+1}} \left( \frac{2^n \pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

其中  $n$  是多維的空間。黑洞的 entropy 要大過於 25，才算是一個黑洞[9, 10]，這個建議也有助於定下切面方程式的準確度。在粒子碰撞中，產生黑洞的切面是：

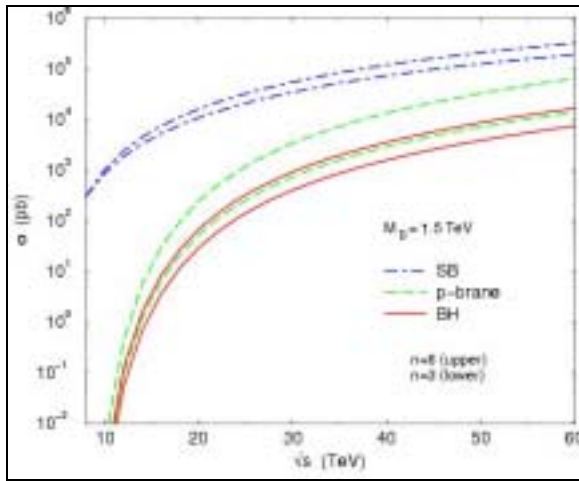
$$\sigma = \pi R_{BH}^2$$

這是依賴半經典的理論。假定兩個近來碰撞的粒子，它們帶有  $(S)^{1/2}$  的能量，如果它們能把所有的能量都轉換成為黑洞，它們之間的距離不應大過於黑洞的半徑，這樣就可以引致上面的切面方程。

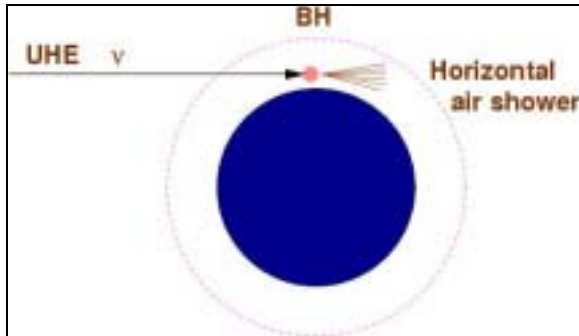
講述完黑洞的產生，繼而要處理的是黑洞的衰變。簡單的想，黑洞可能衰變放出引力子，然後引力子跑到多維空間，這樣實驗便不能看到黑洞。但 Emparan, Horowitz 和 Myers 持不同的觀點，他們

認為因為黑洞的半徑比多維空間的  $R$  小很多，黑洞就好像一個 S-wave 發射點，而不能容易的在多維空間裡，產生高角動量的 states，所以絕大部分會衰變，放出標準模型粒子。根據粒子的自由度， $Z, W, H, \gamma, g, u, d, s, c, b, t; e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau = 30:72:18$  而產生的重子：輕子的比例是 5 : 1，再加上黑洞的衰變是恆溫(isothermal)，一個幾 TeV 的黑洞可以衰變放出 30-50 個粒子，所以每個粒子都帶著幾百 GeV，因此，黑洞的 event 就好像是一個形狀是圓球體的火球，這樣的 event 是非常清晰，背景非常的低，在實驗中可以算黑洞的產生數目，來斷定  $M_D$  的大小，及多維空間的數目[10]。

另外，我又約略的提到弦球；弦球是一條極為活躍且纏繞在一起的弦。弦球跟黑洞有著密切的關係，透過一個轉換點，弦球會轉變成黑洞，黑洞也會轉變為弦球，在轉變點上，弦球和黑洞的特性是一致的，這就是 Correspondence Principle。在 Correspondence 能量之下，只有弦球，弦球的產生切面，比黑洞大的更多，因為它的 threshold 只有  $M_S$ ， $M_S$  比  $M_D$  低，所以在 LHC，產生弦球比黑洞來得容易的多。在圖七，表示黑洞，弦球及 P-brane 的產生切面[11]。P-brane[12]是黑洞的普遍化解，黑洞是 P-brane 在  $P = 0$  的特別解，在這邊不再多描述 P-brane 了。



圖七：黑洞、弦球、p-brane 的產生切面。



圖八：UHECR 微中子所引發的 horizontal shower。

這些黑洞或弦球都可在宇宙射線中產生，因為宇宙射線的粒子能量比 LHC 更高，只不過在全世界的幾個天文宇宙實驗中，比較少量的可以看到黑洞或弦球的效應。如圖八表示超高能的中微子可產生 horizontal air shower。

### 三、Warped 多維空間

Randall-Sundrum(RS)模型[13]用一個普通數字來解釋 Gauge hierarchy 問題。模型的架構在圖九表示。

在圖九有兩片 brane，它們放在 AdS 空間，因

為在 AdS 空間，metric 就會有一個 exp 因子，就是這因子的關係，可以解釋弱電與 Planck scale 的關係。

跟 ADD 模型相似，在 RS 模型中，標準模型粒子被困在 TeV brane 上，而只有引力子能夠走在多維空間。但跟 ADD 模型很不同的地方，就是 RS 模型裡的引力子 Kaluza-Klein state 是個別的，大約在 TeV scale 左右。引力子 Kaluza-Klein 的重量譜是：

$$m_n = x_n \frac{\Lambda_\pi}{\sqrt{2}} \frac{k}{M_{Pl}}$$

其中  $x_n$  是 n-th modified Bessel 函數的零 ( $x_1=3.83$ ,  $x_2=7.02$ ,  $x_3=10.17$ , ...),  $\Lambda_\pi$  及  $\frac{k}{M_{Pl}}$  是模型參數，

$\Lambda_\pi \sim \text{TeV}$ ,  $\frac{k}{M_{Pl}} \sim 0.1$ ，而引力子跟其他粒子有

以下的作用：

$$L = -\frac{1}{M_{Pl}} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{\Lambda_\pi} T^{\mu\nu}(x) \sum_{n=1}^{\infty} h_{\mu\nu}^{(n)}(x)$$

所以可能在高能實驗中，看到  $h_{\mu\nu}^{(n)}$  的作用。

舉例來說，在 Drell-Yan 產生可以看到多個引力子的 KK state，而且這些 states 不是平均重的，根據 modified Bessel 函數的零來分佈。

另外在 RS 模型中，有一個從背景的 metric 的波動，產生的 scalar-boson，the radion。這個 radion 就是來描述那兩片 brane 之間的距離，並用以解釋 gauge hierarchy 問題，所以 Goldberger and Wise [14] 用一個 bulk scalar field 來產生位能，且 radion 可以得到重量，大約有 0.1—1 TeV。由於 radion 比其他引力子重量較輕，所以在加速器可能發現的 RS 模型粒子，就是 radion。

Radion 跟其他粒子作用是：

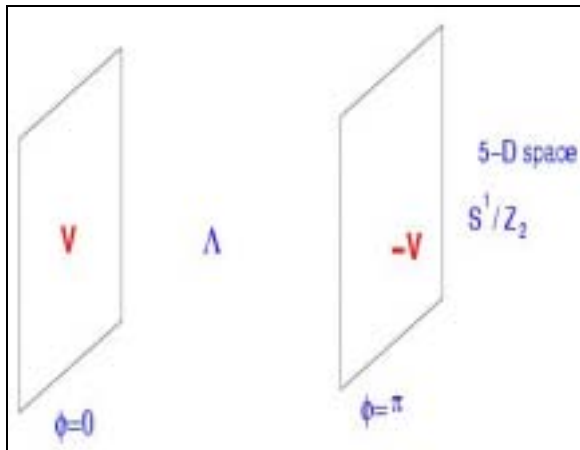
$$L_{\text{int}} = \frac{\phi}{\Lambda_\Phi} T_\mu^\mu(SM)$$

$$T_\mu^\mu(SM) = \sum_f m_f \bar{f} f - 2m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} - m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$$

$$+ (2m_h^2 h^2 - \partial_\mu h \partial^\mu h) + \dots + \sum_a \frac{\beta_a(g_a)}{2g_a} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

在以上程式中，最後一項是從 trace anomaly 產生。在當中看到  $\phi - g - g$  作用非常大，因為最可能產生 radion 的作用是膠子碰撞。

$$gg \rightarrow \phi$$



圖九：Randall-Sundrum 模型。

在圖十，表示載重子撞擊的切面，可見膠子融合是最大，其次是 WW, ZZ 融合。至於 radion 的衰變跟它的重量有關， $m_\phi \leq 130 \text{ GeV}$ ， $\phi \rightarrow gg$  是最大，而  $m_\phi \geq 2M_Z$ ， $\phi \rightarrow WW, ZZ$  是最大[15]。

另外，radion 有一個特點，就是它可能跟標準模型的 Higgs boson 有混合，透過這項

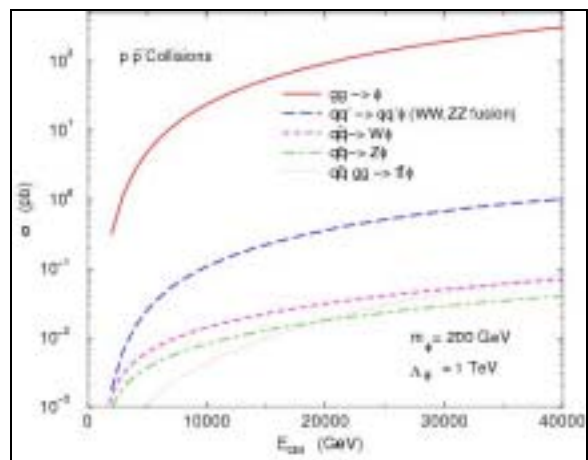
$$S_\xi = \xi \int d^4 x \sqrt{g_{\text{vis}}} R(g_{\text{vis}}) \hat{H}^+ \hat{H}$$

當中  $R(g_{\text{vis}})$  是 Ricci scalar，因為這個混合，令到 Higgs boson 的特性，如衰變，有所變化，這些現

象都可以在加速器裡驗證。更有趣的現象，就是這混合可引致幾個三點頂點(triple vertex)

$$h_{\mu\nu}^{(n)} - \phi - h, h_{\mu\nu}^{(n)} - \phi - \phi$$

在沒有混合，這些頂點是零，所以在加速器可以直接測量這些頂點而產生作用。在[16]我們討論  $e^+ e^- \rightarrow G^{(n)} \rightarrow h\phi$ ，發現這作用非常有可能驗證 radion-Higgs 混合。



圖十：Radion 的產生砌面。

#### 四、TeV<sup>-1</sup> 大小的多維空間

如果把 Gauge bosons 放進多為空間，空間的大小，就不可以像 ADD 模型的空間這麼大。最多只可以有 1/TeV 的大小，這是因為實驗測試已到達這準確度。Diene *et. al*[17]提議把 Gauge bosons 放進多為空間，會令 gauge coupling 感到 Kaluza-Klein states 的存在。令它們與能量的改變從 logarithmic 變成 power-law，這樣，gauge coupling 在比傳統能量低的地方，就可以統一了(early unification)。這是一個非常有趣的現象，有關的計算，請參考[17]。

如果 gauge bosons 存在於多維空間，其 KK states 可以從兩個方面影響高能實驗。其一是，由

於這 KK states 跟標準模型的 gauge bosons 有同一樣的量子數目，所以，它們都會混在一起，影響到在 LEP 測量的精準參數，因此，我們可以從精準參數的數據，來限制這些 KK states 的重量，也是多為空間的 scale，現在從精準數據所得到的限制，可達  $M_C \approx 3.6 \text{ TeV}$ [18]。另外，我們也可以從高能實驗中測試這些 KK states 的效應，例如，影響  $eq \rightarrow eq$  的碰撞，以及藉  $s \leftrightarrow t \leftrightarrow u$  轉換的作用。我們可以將 KK states 的效應寫成

$$M_{\alpha\beta}^{eq}(s) = e^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{Q_e Q_q}{s} + \frac{g_\alpha^e g_\beta^q}{\sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} \frac{1}{s - M_Z^2} \\ \left( \frac{Q_e Q_q}{s} + \frac{g_\alpha^e g_\beta^q}{\sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} \right) \frac{\pi^2}{3M_c^2} \end{array} \right\}$$

在其中，首兩項是因於標準模型的  $\gamma$  and  $Z$  bosons，而後兩項是  $\gamma$  and  $Z$  bosons 的 KK states 的效應。在 [19] 中，我們藉著多個高能實驗的數據來限制這些效應。我們用了：(i) 在 Tevatron 的 Drell-Yan 的產生，(ii) HERA 的不帶電和帶電的碰撞 (iii) 在 LEP II 重子及輕子的產生及其角度分佈，(iv) Tevatron 中的 dijet 的產生，及 (v) Tevatron 中的  $t\bar{t}$  產生切面，最後得到的限制高達  $M_C \approx 6.8 \text{ TeV}$ [19]，這比精確參數的限制高出兩倍。我們也估計在 Tevatron RII 及將來 LHC 所能達到的限制，在 LHC 應可達到  $M_C \sim 13 - 15 \text{ TeV}$ [19]。

## 五、Universal 多維空間

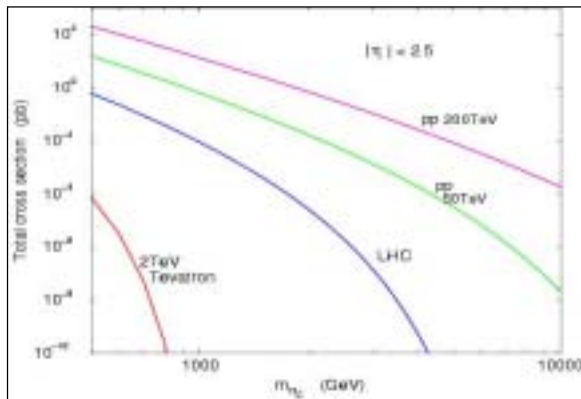
這模型跟之前的類似，所不同的地方，是把所有標準模型的粒子都放到多維空間[20]。這樣多維空間的動量都會守恆。當多維空間被壓化

(compactified)，動量守恆會演變成 KK 數量守恆。在一些模型中，可能有邊際項的產生，引而破壞 KK 動量守恆，無論如何，剩下的守恆只有一個  $Z_2$  parity，叫做 KK parity。單 parity 分配到單數的 KK states，而雙 parity 分配到雙數的 KK states。這樣，第一個最輕 KK state 是單 parity，所以無法再衰變到更輕的粒子，於是最輕的 KK state 是非常的穩定。根據一個計算[21]最輕的 KK state 是  $\gamma^{(1)}$ 。在加速器中。這模型的特點就好像是超對稱一樣，event signature 是 multi-jet 或 multi-leptons 加上不見的能量。另外，這個最輕的 KK state 也有可能是一個黑暗物質[22]。這  $\gamma^{(1)}$  來做黑暗物質跟一般超對稱的 neutralino 有很不同的 signature。因為  $\gamma^{(1)} \gamma^{(1)} \rightarrow e^+ e^-$  產生單一能量的正子[23]，這跟 neutralino 融合所產生的正子完全不同，這樣藉測量正子的能量譜，就可以分出黑暗物質的特性。

## 六、五維的 SU(5) 超對稱統一模型

這模型[24]的起點是 Randall-Sundrum (RS) 模型，當中有兩片 branes，Planck brane 及 TeV brane，兩 branes 之間是 AdS 空間。這樣，gauge hierarchy 問題沒了。SU(5) 的對稱都存在整個空間，但邊際條件把 Planck brane 上的 SU(5) 對稱作出破壞，剩下來只是標準模型的對稱，而 TeV brane 還是有著 SU(5) 對稱。最特別就是邊際條件使到 color-triplet Higgs 場的波函數值，在 Planck brane 上是零，如果所有物質的費米子都只存在 Planck brane 上，費米子就不會跟 color-triplet Higgs 場有任何作用，這樣就解決質子衰變的問題，亦可稱為 doublet-triplet 問題[25]。





圖十一：Colored Higgs boson 產生切面。

這個模型另一個特點就是這些 color-triplet 場的重量只有 TeV[26], 就 RS 模型的 Warped factor, 因這些 color-triplet Higgs and Higgsions 可在加速器產生, 透過以下的作用:

$$L = -ig_s H_C^* \vec{\partial}_\mu H_C T^a A^{a\mu} + g_s^2 T^a T^b H_C^* H_C A_\mu^a A^{b\mu}$$

當中  $A^{a\mu}$  是膠子場。產生是經過  $gg$  及  $q\bar{q}$  融合。

圖十一表示在重子碰撞的切面。這些 colored Higgs boson 或 Higgsinos 在加速器產生後, 就會先重子化(hadronize), 變成重子, 可能帶電或不帶電, 不帶電的就非常困難去測量, 因為它們在探測器都不會丟任何能量。反之, 帶電重子可以藉 ionization 放出很多能量, 在探測器上可以看到, 我們藉這個特點來探測這些 colored Higgs boson 及 Higgsino。將來的 LHC, 應測量到大約 1.5 TeV 的 Higgs 及 Higgsino。

## 七、總結

這篇文章簡略的描述了多個多維空間模型, 這不是一個終結, 而只是另一個新的開端。無論在理

論或實驗上, 有更大的發展空間, 去探討多維空間的模型, 我們密切的期待 LHC 的建成, 來發現各種的新物理。

## 參考資料:

- [1] The LEP Collaborations Electroweak Working Group, LEPEWWG/2002-01.
- [2] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [3] K. Cheung and W.-Y. Keung, Phys. Rev. D **60**, 112003 (1999).
- [4] K. Cheung, Phys. Rev. D **61**, 015005 (2000).
- [5] S. Giddings and S. Thomas, Phys. Rev. D **65**, 056010 (2002).
- [6] S. Dimopoulos and G. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87**, 161602 (2001).
- [7] S. Dimopoulos and R. Emparan, Phys. Lett. B **526**, 393 (2002).
- [8] R. Myers and M. Perry, Ann. Phys. **172**, 304 (1986).
- [9] S.B. Giddings, hep-ph/0110127.
- [10] K. Cheung, Phys. Rev. Lett. **88**, 221602 (2002).
- [11] K. Cheung, Phys. Rev. D **66**, 036007 (2002).
- [12] E. Ahn, M. Cavaglia, and A. Olinto, Phys. Lett. B **551**, 1 (2003).
- [13] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999); **83**, 4690 (1999).
- [14] W. Goldberger and M. Wise, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922 (1999).
- [15] K. Cheung, Phys. Rev. D **63**, 056007 (2001).
- [16] K. Cheung, C. Kim, and J. Song, Phys. Rev. D **67**,



075017 (2003).

[17] K. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, Phys. Lett.

B **436**, 55 (1998); Nucl. Phys. B **537**, 47 (1999).

[18] T. Rizzo and J. Wells, Phys. Rev. D **61**, 016007 (2000).

[19] K. Cheung and G. Landsberg, Phys. Rev. D **65**, 076003 (2002).

[20] T. Appelquist, H. Cheng, and B. Dobrescu, Phys. Rev. D **64**, 035002 (2001).

[21] H. Cheng, K. Matchev, and M. Schmaltz, Phys. Rev. D **66**, 036005 (2002).

[22] G. Servant and T. Tait, Nucl. Phys. B **650**, 391 (2003).

[23] H. Cheng, J. Feng, and K. Matchev, Phys. Rev. Lett. **89**, 211301 (2002).

[24] W. Goldberger, Y. Nomura, and D. Smith, Phys. Rev. D **67**, 075021 (2003).

[25] Y. Kawamura, Prog. Theor. Phys. **105**, 999 (2001).

[26] K. Cheung and G.-C. Cho, Phys. Rev. D **67**, 075003 (2003); hep-ph/0306068.

---

---

### 作者簡介

張敬民，美國威斯康辛大學物理博士，現任職國立清華大學物理系，此文章內的研究結果是作者在 UC-Davis 開始，繼而在國家科學理論研究中心物理組進行，直到轉任到清華大學物理系繼續進行。

Email: [cheung@phys.nthu.edu.tw](mailto:cheung@phys.nthu.edu.tw)