

# 分數量子霍爾效應

孫允武

中興大學物理系

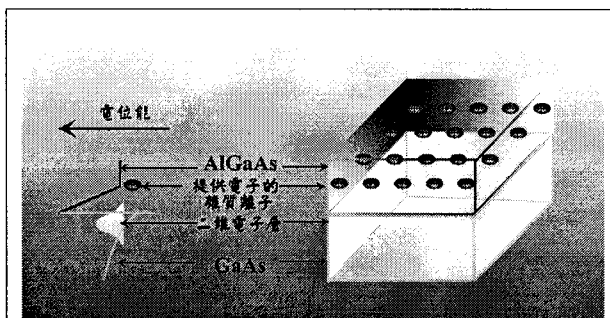
1998 年的諾貝爾物理獎已經揭曉，頒給普林斯頓大學華裔教授崔琦 (D. C. Tsui)、哥倫比亞大學及貝爾實驗室德裔教授史托馬 (H. L. Störmer) 和史丹佛大學的拉福林 (R. B. Laughlin) 教授，他們發現了一種具有**分數電荷激發態的量子流體** (quantum fluid)。<sup>[註一]</sup>

## 發現的旅程

發現的旅程是由那時還在貝爾實驗室的崔琦、史托馬和一位與本次諾貝爾獎擦身而過的加瑟德(A. C. Gossard)在 1982 年發表的研究工作開始<sup>[註二]</sup>。他們將加瑟德提供夾在兩不同半導體晶體間界面的**二維電子**樣品，置於低於絕對溫度 0.5 度 (攝氏零下 271.65 度) 的低溫及超過地磁四十萬倍的強大磁場 (約 20 Tesla)，進行霍爾效應 (Hall effect) 的測量，很意外地，除了預知可由一個電子在磁場中運動量子化解釋的整數量子霍爾效應 (integral quantum Hall effect，簡寫為 IQHE)<sup>[註三]</sup>，還發現了所謂的**分數量子霍爾效應** (fractional quantum Hall effect，簡寫為 FQHE)，二維電子系統在磁場中的行為遠較我們想像的豐富有趣。FQHE 的解釋是由拉福林在次年提出<sup>[註四]</sup>，認為二維電子系統由於和磁場的交互作用，形成一個電子和電子間具強關連性的超流基態，更新奇的是這個系統的較低能量的激發態是帶有分數倍基本電荷 ( $e$ ) 的準粒子 (quasi-particle)。

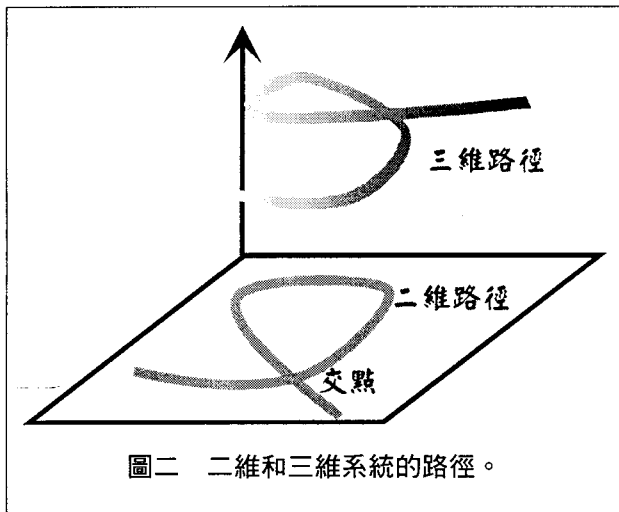
## 二維電子的世界

二維電子系統顧名思義是指電子僅能侷限在一個二維的平面運動，其實他並不是十分特殊罕見的东西，在電腦中的 CPU 或記憶體所使用的電晶體<sup>[註五]</sup>，就是利用侷限在矽與二氧化矽兩種材料間界面的二維電子來導電的，用來觀察 FQHE 的樣品品質要求遠比在記憶體中用的嚴苛。我們利用所謂分子束磊晶 (molecular beam epitaxy) 技術，在超高真空的腔體中一層一層準確地在基板上形成砷化鎵 (GaAs) 和砷化鋁鎵 (AlGaAs) 兩種不同半導體晶體接合在一起的結構 (見圖一)，由於導電電子在砷化鎵中的位能較在砷化鋁鎵中低，而且提供導



圖一 二維電子層形成於砷化鎵 (GaAs) 和砷化鋁鎵 (AlGaAs) 兩種不同半導體晶體的介面。

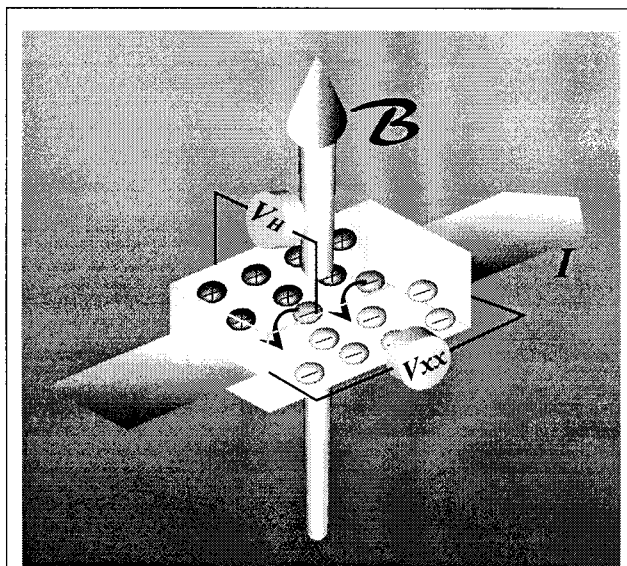
電電子的固定雜質位於砷化鋁鎵內離界面約幾百到幾千埃的平面，雜質游離後形成帶正電的離子會吸引電子，使得導電電子被限制在靠近界面的砷化鎵內，沿樣品平面方向則能自由運動。更重要的是在低溫的環境，排除晶格振動的影響，電子能夠越過十萬甚至百萬個原子不受到散射。



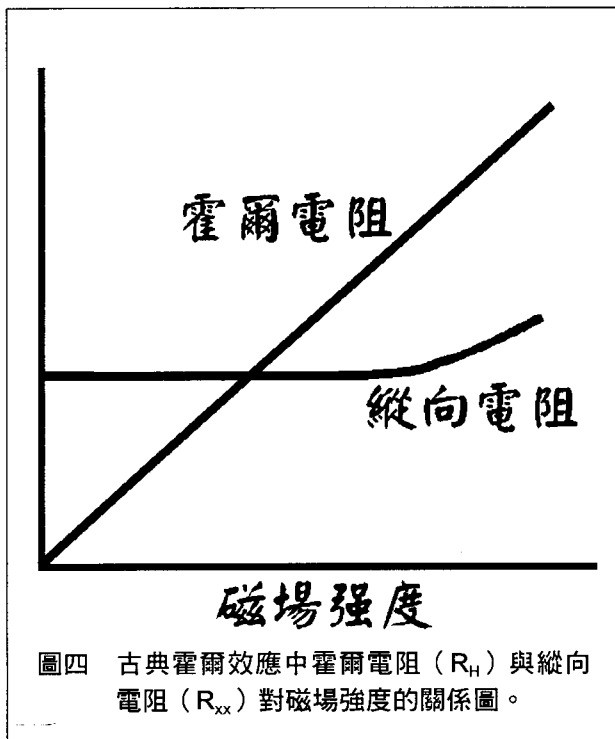
二維和三維系統在幾何結構上是很不一樣的，考慮圖二的兩個路徑，二維的路徑繞一圈必然有一交點，形成一封閉迴圈，三維路徑則未必。這個特性在考慮電子物質波的干涉時有很重大的影響，簡單的說對於封閉的迴圈若電子要有穩定的量子狀態存在，物質波必須在該路徑上形成駐波，而對三維路徑則不一定需要。電子受到磁力作用會做圓周運動，只要不受到散射，便可形成一封閉路徑，合於駐波條件的波長決定電子的能量，由此簡單的量子化條件可得電子在磁場中的能量不是連續的，而是一系列間隔相等的能階，我們通常稱為藍道級 (Landau levels) [註六]。此外，二維的限制也造成電子在磁場中統計特性的一些有趣特性，後面再介紹。

## 霍爾效應

霍爾效應一直是物理學家研究導電材料的利器，早在 1879 年霍爾 (Edwin Hall) 在約翰霍普金斯 (Johns Hopkins University) 大學作研究生時就發現了。通電流的導體中，運動的電子受磁場影響而偏移，造成導體兩邊電荷累積 (見圖三)，引發一與電流和磁場方向垂直的電場，到達穩定狀態時導電電子所受此電場的電力剛好抵消掉磁力，電流不再受磁場影響。引發的電場可藉由測量導體兩側的電壓而得，此電壓稱做霍爾電壓 ( $V_H$ )，除以電流可得霍爾電阻 ( $R_H = V_H/I$ )，有別於一般的電阻 (這裡稱做縱向電阻  $R_{xx} = V_{xx}/I$ )。當磁場愈大時，所引發抵消磁力的電場也愈大，霍爾電壓 (或電阻) 也愈大，和磁場強度  $B$  成正比。圖四是古典霍爾效應中霍爾電阻 ( $R_H$ ) 與縱向電阻 ( $R_{xx}$ ) 對磁場強度的關係圖， $R_H$  是一通過原點的直線，而  $R_{xx}$  在低磁場時幾乎不變，在高磁場時微微上升。

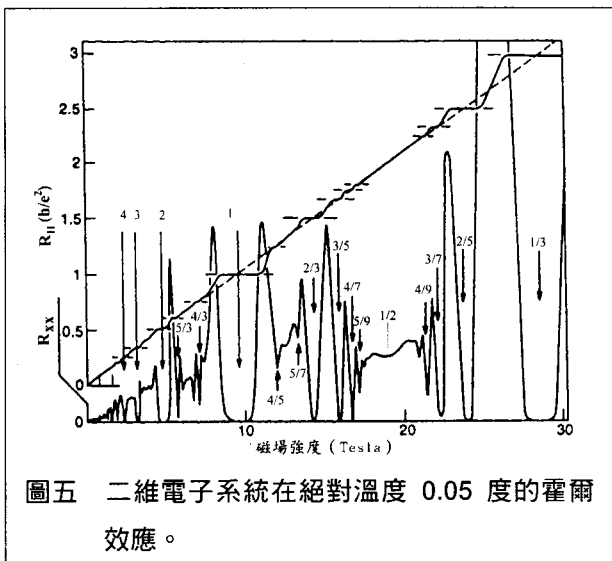


圖三 霍爾效應示意圖。



### 二維電子系統的霍爾效應

圖五是二維電子系統在極低溫（絕對溫度 0.05 度）的環境所得到霍爾效應數據圖，令人訝異的  $R_H$  對磁場的曲線不再是直線，而有許多階梯狀的平台 (plateau) 出現，這些平台所對應的霍爾電阻值恰為  $(h/e^2)(1/\nu)$ ，其中  $\nu$ （即圖中箭頭上所標記的數）

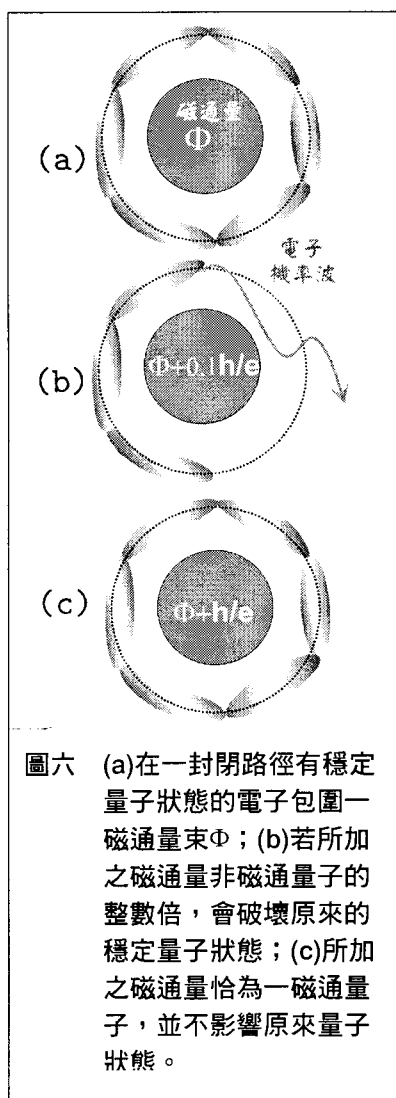


為整數或特定分母為奇數的分數， $h$  為普朗克常數。當  $\nu$  為整數時，即所謂的 IQHE，所得之  $h/e^2$  可以準確到 0.045ppm！和所使用的樣品特性關係不大<sup>[註 4]</sup>，因此定義  $R_k = h/e^2 = 25,812.8056(12)\Omega$ （括弧內為最後兩位的誤差）為克立卿常數<sup>[註 5]</sup>（Klitzing constant），是現行的國際電阻度量標準。 $\nu$  為分數的部分即 FQHE，愈好的樣品所觀察到的細微結構愈多。另一有趣的現象是在霍爾電阻形成平台同時，二維電子的電阻 ( $R_{xx}$ ) 降為零！是形成超導體了嗎？不論在 IQHE 或 FQHE，電子運動時的確不受到碰撞，沒有阻力。為什麼呢？這些奇異的數字  $\nu$  到底暗藏何種玄機？

### 磁通量子

要探究量子霍爾效應所隱藏的物理概念，必須先瞭解量子力學中對電子與磁場的描述。量子世界中的電子很自然的是一個帶電量為  $-e$  的物質波（或機率分佈），電荷的基本單位就是  $e$ 。那麼磁場呢？由一些在二維電磁場變換特性（這裡是指規範轉換 (gauge transform) 的考量，最自然的物理量不是磁場，而是面積乘以和平面垂直方向磁場強度所定義的磁通量  $\Phi$  (magnetic flux)，他的自然單位是  $\Phi_0 = h/e = 4.1 \times 10^{-7} \text{G cm}^2$ ，稱為**磁通量子** (magnetic flux quantum)。磁通量子非常小，以一般的地球磁場為例，每平方公分就有約一百萬個磁通量子。為什麼要選擇這樣的單位呢？磁通量並不像電荷那樣有對應的基本粒子。下面我們介紹磁通量子和電子有趣的量子力學特性，藉此培養一下對磁通量子的「感覺」。

圖六(a)表示在一封閉路徑有穩定量子狀態（機率波形成駐波）的電子，包圍一磁通量束  $\Phi$ 。假想



圖六 (a)在一封閉路徑有穩定量子狀態的電子包圍一磁通量束 $\Phi$ ；(b)若所加之磁通量非磁通量子的整數倍，會破壞原來的穩定量子狀態；(c)所加之磁通量恰為一磁通量子，並不影響原來量子狀態。

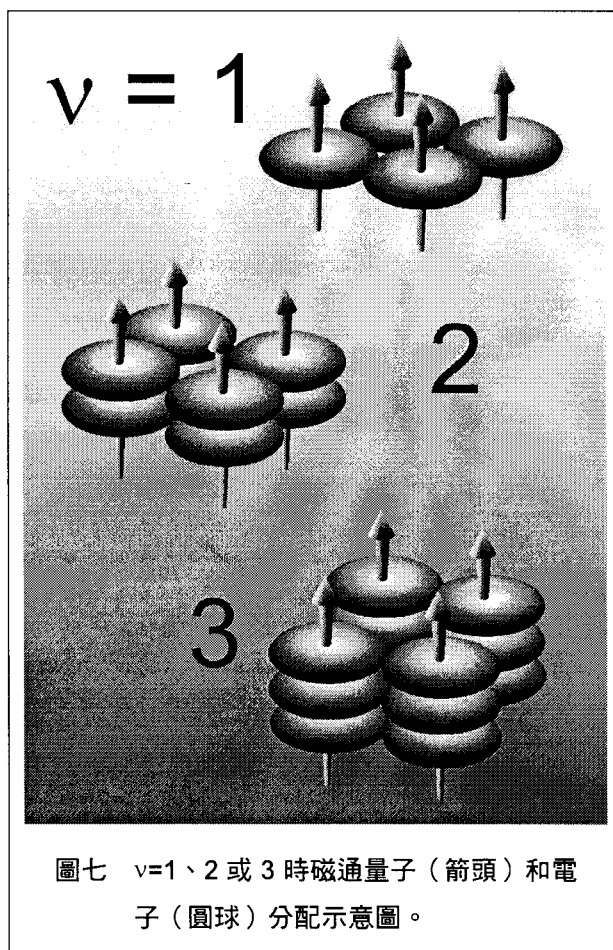
一個非常緩慢的步驟增加磁通量 ( $d\Phi/dt \rightarrow 0$ ，在路徑上的感應電場可忽略)，而且不改變路徑上的磁場，也就是電子所受到的電磁力不變，經過量子力學的分析發現，若所加之磁通量非磁通量子的整數倍，例如說  $0.1h/e$  [如圖六

(b)]，會使電子沿封閉路徑走一圈時物質波相位改變，破壞原來合於駐波條件的穩定量子狀態；若所加之磁通量

### 糖葫蘆模型

QHE 中霍爾電阻量子化的神奇數字 $\nu$ 原來就是二維電子數目和穿過樣品的磁通量子數目的比值，定義做填充因子 (filling factor)。磁場愈高時，穿過樣品的磁通量子愈多，若電子數目固定， $\nu$ 就愈小，和磁場強度成反比。

當 $\nu=1$ 時，代表平均每一個磁通量子分配到一個電子，而 $\nu=2$ 或3則代表每個磁通量子分別分配到2個或3個電子。我們可以想像磁通量子是糖葫蘆的竹籤，而電子像是串在上面的蕃茄， $\nu=1$ 可以一支竹籤插一個蕃茄表示， $\nu=2$ 則是兩個蕃茄，其餘整數的情形可類推 (見圖七)。那麼分數的情形呢？以 $\nu=1/3$ 為例，一支竹籤插三分之一顆蕃茄嗎？電子可不像蕃茄可分割呀！我們只好用三支竹籤插一顆蕃茄了。圖八中除 $\nu=1/3$ 外，還畫了  $1/2$  的情形。這跟對應這些分數的量子霍爾態形成的模型有關，後面再說明。但基本上，不管糖葫蘆怎麼插， $\nu=2/5$ 是指兩個電子分配到五個磁通量子。



圖七  $\nu=1、2$  或  $3$  時磁通量子 (箭頭) 和電子 (圓球) 分配示意圖。

填充因子還有一個看法，這和電子在磁場做圓周運動量子化所得之藍道級有關。藍道級和一般原子能級並不相同，原子內一個軌道只可填兩個不同自旋的電子，一個藍道級，若不考慮自旋，所能填的電子數恰等於穿過平面的磁通量子數。因此，填充因子也是藍道級被填滿的數目。

上面我們只是描述 $\nu$ 的定義而已，並不能明顯看出不同的數目間有何區別？但實驗告訴我們二維電子系統的確在電子數目和磁通量子數目成一簡單整數比例時有特別的表現。許多有趣的物理現象，常常是發生在兩個物理量成簡單比例的時候，例如光在共振腔的共振、波的干涉等。

## 超流體

我們先回到圖五的數據，在對應到一些特定 $\nu$ 值（例如 1、2 或 1/3、2/3 等）的磁場附近，電阻（ $R_{xx}$ ）幾乎是零，相差太多時，電阻才增加。很顯然，在這些 $\nu$ 值附近，二維電子和磁通量子形成了一種具超流特性（superfluidity）的狀態，就如同其他早期發現的量子流體一樣，如在極低溫的液態氦（1962、1978 及 1996 諾貝爾物理獎）和超導體（1913、1972 及 1987 諾貝爾物理獎）。這些具超流性的基態有幾個重要的共同特性，他們粒子間都有很強的關連性，一個粒子的運動會影響到其他粒子，而且這些系統最低能量的激發態（excited state）和基態間都有一個大小不為 0（有限值）的能隙（energy gap）。在極低的溫度，粒子不能獲得充分的能量克服能隙跳到激發態，而低能量的狀態又被其他粒子所佔滿，無處可去，如同在一擠滿人的窄巷，大家只能一起向前（或向後）走。「人在江湖，身不由己」正是超流體的寫照。另一種想法是能隙

代表基態穩定的程度，任何從基態做很小的偏移或改變都需要有限值的能量。

對於 $\nu$ 為整數的狀態，能隙的來源比較簡單。當整數個藍道級填滿時，其中一個電子要跳到較高能階時，至少要付出藍道級之間的能量差<sup>[註六]</sup>。當 $\nu$ 為分數，例如 1/3 時，藍道級只填了 1/3，還有 2/3 部分尚未填滿，電子可以跑到其他有相同能量的空軌道，能隙要從哪裡來呢？別忘了電子間還有庫倫斥力要考慮！

## 不可壓縮的量子流體

拉福林認知到在分數填充因子所觀察到的現象是由於電子形成一不可壓縮的量子流體（incompressible quantum fluid）。壓縮一個系統，等效而言可說是改變電子密度，當固定面積及磁通量子數，就是改變電子數目。由於能隙的存在，不論加或減電子均需有限的能量，即很小量的改變密度需要有限的能量，他們的比值是系統可壓縮度的度量，幾乎為 0，故稱「不可壓縮」。

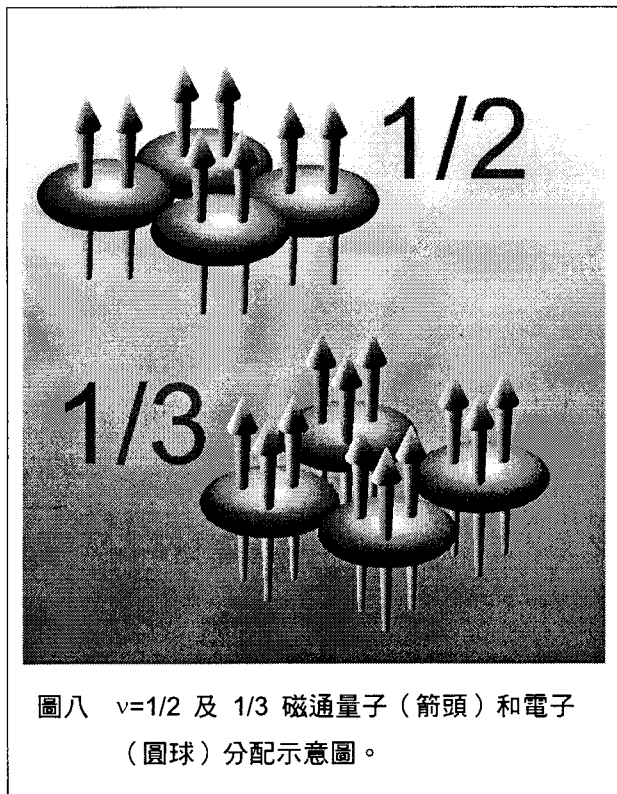
拉福林<sup>[註四]</sup>還提出 $\nu=1/m$ （ $m$  是奇數）分數狀態的多電子波函數，描述在量子流體基態所有電子的分佈及相互間的關係。 $N$  電子波函數中最重要的部份是

$$\Psi_{1,m} = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_N) \\ = (z_1 - z_2)^m (z_1 - z_3)^m (z_2 - z_3)^m \dots (z_j - z_k)^m \dots (z_{N-1} - z_N)^m,$$

其中  $z_j$  是第  $j$  個電子的二維座標以複數表示， $z_j = x_j + iy_j$ 。其餘的只是將第  $j$  個電子分佈集中在位置  $z_j$  的指數衰減函數。我們簡單的看一下  $\Psi_{1,m}$  的特性：

- (1) 很清楚的當兩個電子有相同位置的機率為零，因為任何  $z_j = z_k$ ， $\Psi_{1,m} = 0$ 。而且位置愈近，機率愈小。

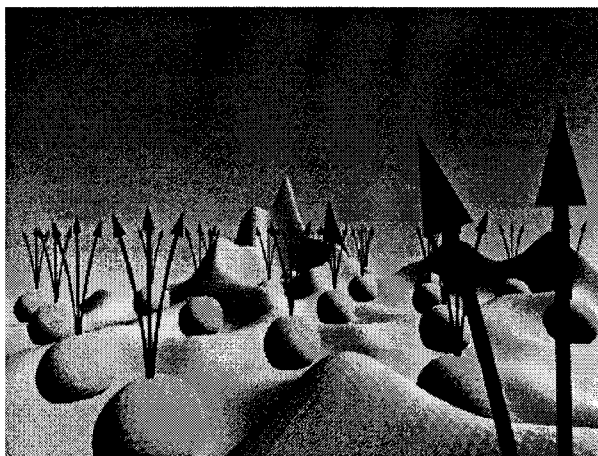
- (2) 當  $m$  為奇數時，任兩個電子交換位置，波函數會多出一個負號，這個正好符合電子是費米子 (fermion) 的特性 (在後面說明)， $m$  是偶數時特性就不對了。



圖八  $\nu=1/2$  及  $1/3$  磁通量子 (箭頭) 和電子 (圓球) 分配示意圖。

- (3) 圖九是貝爾實驗室所提供  $m=3$  ( $\nu=1/3$ ) 電子分佈的電腦繪製圖像<sup>[註八]</sup>，假想第 2 到  $N$  個電子的位置固定，第 1 個電子在二維平面的機率分佈。綠色的球代表固定的電子，穿過他的三個箭頭即分配到的三個磁通量子 (像不像火星人入侵?)。第一個電子的分佈會避開其他固定電子所在的位置，整個電子系統藉由互相避開而將庫侖斥力降到最低，基態到激發態間的能隙就是由這個電位能的降低所造成的。這裡還有一點要說明的，真實量子流體基態的電子分佈並非像圖九那樣，電子不可能固定

於一點，而是到處流動，平均而言，分佈是均勻的。



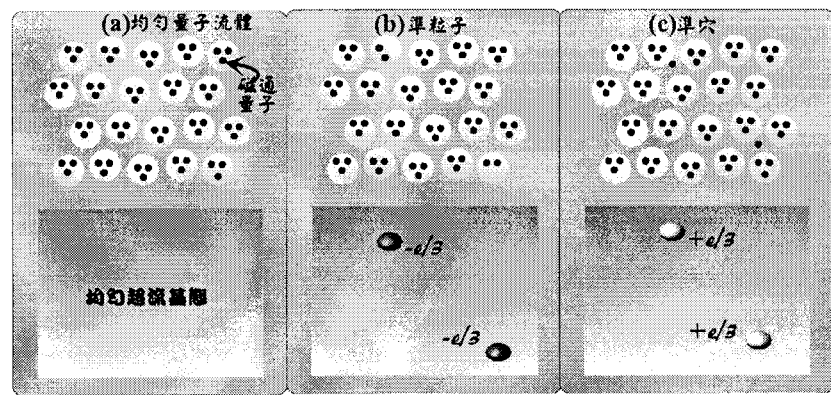
圖九 貝爾實驗室所提供  $\nu=1/3$  FQHE 量子流體的電子分佈圖[註八]。

圖九中分配給固定電子的磁通量子是穿過電子的中心和電子一起跑的，假如真是這樣的話，由於電子彼此間互相避開，電子在運動時除了自己本身的磁通量子，根本就碰不到其他的磁通量子，也就是說看不到磁場！是不是有些匪夷所思？

### 帶分數電荷的準粒子

先總結一下對 FQHE 所提出的物理圖像：在填充因子  $\nu$  為  $1/m$  時 ( $m$  為奇數)，一個電子分配到  $m$  個磁通量子，二維電子系統藉由彼此避開的形式有效的降低庫侖斥力位能，形成一電子間有強關連性的不可壓縮量子流體。對於不是  $1/m$  的狀態及所謂的「帶分數基本電荷的準粒子」並未說明。我們先討論後者。

以最早崔琦等人發現的  $\nu=1/3$  FQHE 基態為例，平均一個電子分配到三個磁通量子，形成一均勻的量子流體，如圖十(a)所示，具完美的超流性。



圖十 (a)均勻的超流基態；(b)少了一個磁通量子，形成準粒子；  
(c)若是多了一個磁通量子，形成準穴。

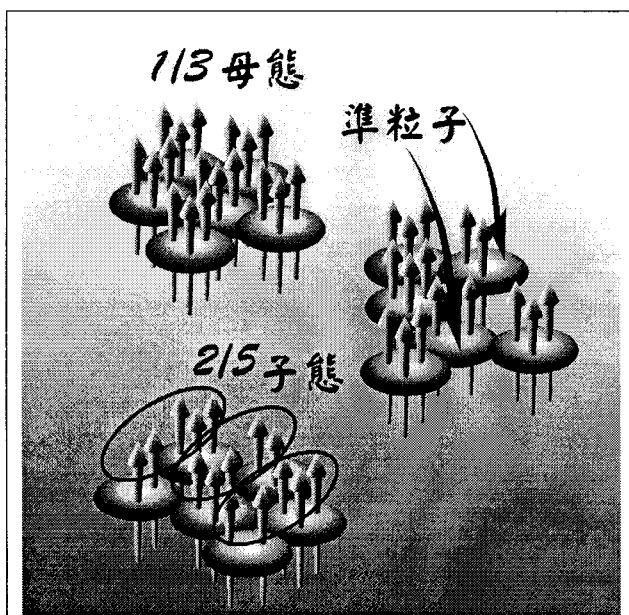
假如情況不是那麼完美，少了一個磁通量子，如圖十(b)，該部分可視為量子流體基態的「缺陷」，附近的流體會些微調整使得缺陷孤立出來，能量較基態為高，而其餘的部分仍然保持超流性。孤立出來的缺陷可以在流體中運動，能夠像粒子一樣定義出能量和動量，故稱為「準粒子」，他的帶電量就是「多」出來的三分之一電子的電荷，即 $-e/3$ 。在 $\nu=1/3$ 附近，少了幾個磁通量子就會形成幾個準粒子，而且這些準粒子運動時是會受到散射，跳到接近能量的空準粒子軌道，電阻不再是零。圖五在比 $\nu=1/3$ 磁場小的部分，電阻 ( $R_{xx}$ ) 增加，不再是超流體。可是還有一個問題？比 $\nu=1/3$  磁場小一點點時，應該就有準粒子形成，為何電阻還是零呢？這就要考慮樣品並不是百分之百的平整，平面上的電位能有高低起伏，當準粒子很少時，有些像少量的水在凹凸不平的水泥地面上會形成一個個互不相通的小水窪，根本就侷限在平面某處，不影響全樣品的導電性。當準粒子多到一定程度，如同水泥地上的水，可互相導通，便對樣品電阻有影響了。

若是多了一個磁通量子，如圖十(c)，對電子

而言，就是「少」了三分之一個電子，量子流體中會形成一個「穴」(hole)的缺陷四處流動，稱做「準穴」(quasi-hole)，帶電量恰與多出三分之一電子所形成之準粒子相反，即 $+e/3$ ，行為和準粒子類似。這裡要強調一下，所謂的準粒子或準穴都不是單一電子產生的行為，而是許多電子的集體行為 (collective behavior)。

#### 親子模型

拉福林認為，當磁場低於 $\nu=1/3$  很多，使得平均每兩個電子就有一個準粒子（這時剛好 2 個電子擁有 5 個磁通量子，見圖十一），這些準粒子會形

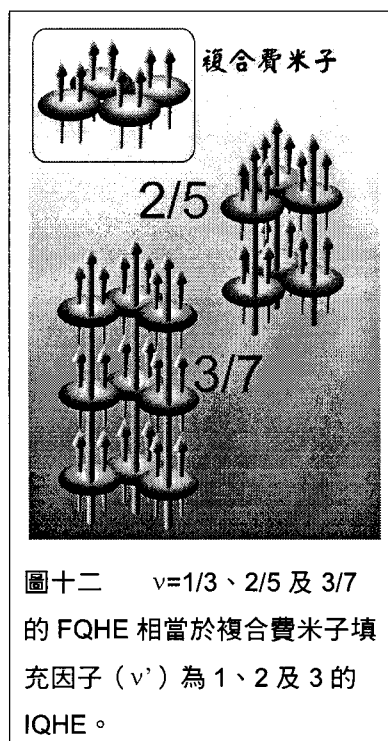


圖十一  $\nu=2/5$  的 FQHE，平均每兩個電子就有一個準粒子，剛好 2 個電子擁有 5 個磁通量子。

成自己的不可壓縮量子流體，稱做「子態」(daughter state)，電阻又會降低到零，而原來  $1/3$  流體就稱做「母態」(parent state)。磁場再低下去，在  $\nu=2/5$  的子態中又會有準粒子產生，在適當的狀況，又會形成子態準粒子的不可壓縮量子流體，稱做「孫態」吧！？這個模型就稱做「階層模型」(hierarchical model)，或叫「親子模型」也很貼切。愈多階的子態所含的準粒子就愈少，也就愈不穩定，不免有「一代不如一代」的現象，和圖五的數據十分吻合。這個理論不但告訴我們這些奇特填充因子所對應的量子基態是什麼，也預知哪些填充因子會有 FQHE 現象，更成功定性的解釋他們相對強度關係。

### 與磁通量子共舞

糖葫蘆只有一種串法嗎？美國紐約州立大學的傑恩 (J. K. Jain) [註九] 提出了另一種看法，他將一個電子和兩個磁通量子真的結合在一起稱做「複合費米子」(composite fermion)，在  $\nu=1/2$  時就相當於是複合費米子在沒有磁場的狀況，但不會有超流現象，就和電子在零磁場的情況一樣。在  $\nu=1/2$  兩邊的 FQHE 就是這個複合費米子的 IQHE。用我們的糖葫蘆模型來看 (圖十二)， $\nu=1/3$  的 FQHE 就是已經插了兩根竹籤的蕃茄再多插一根竹籤，即複合費米子填充因子 ( $\nu'$ ) 為 1 的 IQHE； $\nu=2/5$  就是一根竹籤串了兩個已經有兩根竹籤的蕃茄，即複合費米子  $\nu'$  為 2 的 IQHE，其餘類推。原先傑恩提出這個想法主要是要寫下較高階量子流體的波函數並計算其能量，結果非常成功，沒有想到電子真的和兩個磁通量子一起跑，後來的一些實驗證實真有複合費米子這回事。



圖十二  $\nu=1/3$ 、 $2/5$  及  $3/7$  的 FQHE 相當於複合費米子填充因子 ( $\nu'$ ) 為 1、2 及 3 的 IQHE。

### 統計特性的轉換

在量子的世界，電子是不可分辨的，我們不能指出誰是電子甲、誰是電子乙，兩個電子交換位置僅是在波函數前加個負號，並不會影響電子的組態，多個負號也不會改變機率分佈 [註十]。交換位置會多出一個負號的粒子歸類

為費米子。對應費米子的叫波色子 (boson)，兩個波色子交換，並不會改變波函數的符號，像光子、氦核等都是波色子。費米子和波色子還有一個很大的不同處，兩個費米子不能佔領同一個量子狀態 (故又稱不合群粒子)，而許多的波色子卻可跑到同一個量子狀態。尤其在很低的溫度，系統所有的波色子幾乎都處在同一最低能量的狀態，形成一巨觀的量子態，例如超流體的液氦、或超導體都是這樣來的。氦核是由兩個中子及兩個質子結合而成，質子、中子和核外的兩個電子都是費米子，在兩個氦原子交換時，各貢獻出一個 (-1) 的因子，共有偶數 (6) 個費米子，最後所得交換後的波函數並沒變號，成了波色子。而超導體則是材料中的電子成對的結合在一起 (所謂的 "Cooper pair") 成為波色子，這些電子對再凝聚 (condensate) 成超導態。



磁通量子和電子的結合呢？先考慮一個磁通量子和一個電子的複合體，兩個這樣的複合體交換位置。兩個粒子交換位置，若把一個粒子的位置固定，就相當於一粒子繞固定的粒子走半圈。一個電子繞一個磁通量子走一圈會產生  $2\pi$  的相位差，走半圈就只有  $\pi$  的相差，對波函數而言就是多了一個(-1)的因子。因此，上述的複合體交換位置時除了電子本身是費米子的一個(-1)，還多了一個電子繞磁通量子半圈的(-1)，結果波函數並不變號，成了波色子！如果再加一個磁通量子，一個電子兩個磁通量子的複合體，再多個(-1)即可，又變回費米子！一個電子三個磁通量子，又成了波色子！這裡我們得到一個非常有趣的結果，將磁通量子插在電子上，可以改變電子交換的特性，也就是電子的統計特性，費米子可以變成波色子，再變回費米子。或者可將電子看成一個插了一個假想磁通量子的波色子，或插了二個假想磁通量子的費米子，或插了三個假想磁通量子的波色子（餘類推），電子在均勻的磁場中運動就相當於帶了假想磁通量子的波色子或費米子在磁場中運動，在適當的磁場強度，假想的磁通量子形成的磁場剛好可以和外加磁場抵消掉（平均而言），結果得到的是轉換出來的波色子或費米子在平均磁場為零的環境運動。

我們可以將  $\nu=1/3$  的 FQHE 視為一個電子三個磁通量子結合成的複合波色子（composite boson）凝聚成超流體基態的現象。而在  $\nu=1/2$ ，一個電子兩個磁通量子只能形成複合費米子，並不會有凝聚現象。統計特性的分析讓我們更深入的瞭解 FQHE 背後的物理圖像。

兩個帶分數基本電荷的準粒子交換結果又如何？結果所得波函數改變的因子不是 1 也不是(-

1)，而是一個複數，用相位來說是  $\pi$  的分數倍。這些二維的準粒子不是費米子，也不是波色子，他被稱為「任意子」(anyon)，他的統計叫做分數統計<sup>[4]</sup>。

### 還有什麼有趣的問題

最先崔琦他們要找的並不是量子流體的狀態，而是一種電子形成的晶體，所謂的 Wigner Crystal，一種「量子固體」。是不是在特定的情形量子流體會相變為量子固體？事實上二維電子系統在磁場中的相圖是非常豐富的，有超流態，有金屬態，有絕緣態，還有這些態間相變的特性，一直是物理學家注目的焦點。

另外還有一個有趣的題目我們未及碰觸，就是為什麼霍爾電阻形成的平台會這麼的準確？原因和前面所提到的規範不變性有關，嚴格的論述超出本文預設的程度。這裡提供一個有趣的想法：假如  $\nu=1/3$  FQHE 看成帶三個磁通量子的複合波色子的凝聚態，根據本文前面所說，波色子感受不到磁場，何來的霍爾電壓呢？關鍵在磁通量子在運動，會產生感應電動勢，而磁通量子的流量是電子流的三倍，將感應電動勢除以電流恰可得霍爾電阻，和導電的電子數無關。（當作習題吧？）

二維系統的邊界細究起來也大有問題。電子密度到邊界時會愈來愈小，到樣品外則為零。當系統中為例如說  $\nu=1/3$  的 FQHE，邊界的  $\nu$  必然小於  $1/3$ ，會發生什麼事？理論很多，有一種是說二維 FQHE 的邊界會形成一種特殊的一維量子流體，叫做 Luttinger liquid。

## 後記

FQHE 的發展過程可當作一個解決物理問題的典範 (paradigm)，從最早的實驗發現，理論的解釋，到更多的實驗發現，更多理論的發展，聚合了原來在物理不同領域的理論工具，尤其是規範場論，進入凝態物理的範疇，十幾年來獲得豐碩的成果。

在這一簡短的文章中，僅能盡量將現象及物理圖像以較不艱澀的說法呈現給讀者，希望能夠幫助一般讀者抓到這一有趣物理現象的主要觀念。

## 參考資料

註一：有關資訊可參考網站<http://www.nobel.se>。

註二：D. C. Tsui, H. L. Störmer, A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).

註三：IQHE 是在 1980 年發表[K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).]，K. von Klitzing 以此發現獲得 1985 年之諾貝爾物理獎。

註四：R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).

註五：這裡係指金氧半場效電晶體 (MOSFET)，基本原理是利用一二氧化矽絕緣層上的電極控制另一面和矽晶體交接界面的電子濃度，藉此改變導電的特性。

註六：由這簡單的方法，可以得到電子的動能加上磁位能剛好是  $nhv_c$ ， $v_c$  是電子在磁場中做圓周運動的頻率， $h$  是普朗克常數， $n$  則是駐波數。若以較嚴謹的方法可得  $(n+1/2)hv_c$ 。

註七：可參考


<http://physics.nist.gov/PhysRefData/contents.html>.

註八：此圖可自<http://www.bell-labs.com/new/gallery/fqhe.html>下載。

註九：




註十：機率分佈是波函數大小的平方，即  $|\Psi_l|_m|^2$ 。

註十一：更詳盡的說明見 G. S. Canright and S. M. Girvin, Science **247**, 1197 (1990).



# 健仁氣體股份有限公司

## 專業氣體商

一般工業用、醫療用各種氣體  
 $O_2$ 、 $C_2H_2$ 、Ar、 $N_2O$ 、 $CO_2$   
半導體、特殊、雷射用氣體  
 $WF_6$ 、LHe、Xe、 $PH_3$ 、 $SiH_4$   
各種氣體配件，低温容器

解決您使用上的困擾  
是我們服務的最大宗旨

新竹縣竹北市博愛街760巷6號  
電話：(035)516256-7  
傳真：(035)551732