波耳氫原子模型理論建構與基本假設的引入

波耳氫原子模型為微觀系統內的粒子的力學行為給出了的定態、躍遷、頻率條件、對應原理與角動量量子化等新的概念。嚴格地說，一般的物理教科書籍 [1,2,3] 並沒有非常清楚地說明這些量子論之所以被提出其背後的原因，本文的目的就是將這些古量子論的假說更具邏輯性地呈現。

撰文　龍行天

前言

一般普通物理與量子物理的書籍在介紹微觀系統的波耳氫原子模型（1913 年），往往由定態與角動量量子化的假設推導出電子軌道半徑，能量與速率的量子化分佈，利用躍遷的假設驗證原子在兩能階間躍遷下所輻射的光譜與實驗所得的系列公式吻合，而後再由對應原理證明量子的躍遷機制並沒有違反古典的輻射理論。這樣的流程，優點是讓讀者能直觀且快速的接受原子的樣子，以及瞭解電子處在微觀系統內有別於古典物理的種種量子效應。但為何電子的軌道角動量會呈量子化分佈？推導中並沒有清楚的交代波耳最初提出氫原子模型基本假設的邏輯性與演化關係，事實上波耳的原子模型理論建構的流程與上述建構的步驟恰恰相反，角動量量子化不應該成為推導過程最先出現的基本假設，而對應原理也不僅只是驗證躍遷假說的正確性，更重要的是由它引出了能量、角動量量子化的結果。在還沒介紹波耳氫原子模型的演化前，讓我們先瞭解 1908 年所給出的氫原子光譜系列經驗公式：

$$\tilde{\nu}_{mn}=\frac{1}{\lambda_{mn}}=R_H\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)_{n>m}=T_m-T_n \quad \text{......................(1)}$$

上式 $R_H\cong 1.0967758\times 10^7/m$ 為雷德堡常數 $T_q\equiv\frac{R_H}{q^2}$（實驗常數）稱光譜項，其中 $q=1,2,3,\ldots$

波耳氫原子模型基本假設的引入步驟

1912 年波耳（Niels Bohr）在英國與拉塞福做研究，因此對原子的模型有了較多的了解，波耳深信微觀系統內粒子的力學行為與巨觀世界是截然不同的，原子的有模型應與量子論有關聯，他提出了一些觀念，其中電子定態的強制性假設為說明微觀下的電子為何不會撞擊核心給出了一種嶄新的見解，另外由圓周運動與簡諧運動的相關性，波耳也試著將普朗克常數 h 引入原子模型中，但成效都不大。

1913 波耳回到丹麥繼續從事原子模型的研究工作，在一次偶然的機會，由朋友漢森處獲得了一份氫原子巴曼（Balman）光譜系列的資料，當時這份資料立即觸動了波耳對微觀系統的原子模型圖像有了一番新的面貌，進而提出波耳的氫原子模型。以下就是模型的基本假設與量子論被提出的演化過程：

一、電子受庫侖力作用繞帶正電的核做等速率圓周運動。（有核模型）

二、定態的假設（波耳創見）

波耳認為微觀系統（氫原子）內的電子是存有不連續的定態能階，電子只能被允許進駐在這些特定的能階上，而所謂的定態就是當電子處在該能階時不會釋放電磁能量而塌陷到原子核心，這是物理事實，也是電子處在原子的微觀系統中必要的的強制性條件。

三、躍遷與頻率條件 （波耳創見）

由原子光譜的不連續性，波耳認為當原子在不同定態間進行躍遷，那麼原子將會釋放電磁輻射，波耳給出能量差與輻射頻率之間的條件：$\nu_{mn}=\dfrac{E_n-E_m}{h}$

或 $\tilde{\nu}_{mn}=\dfrac{1}{\lambda_{mn}}=\dfrac{E_n-E_m}{hc}$ ，$(n>m)$ ....(2)

將 (2) 與 (1) 做連結得：$T_n\equiv\dfrac{R_{H\infty}}{n^2}=\dfrac{-E_n}{hc}$

電子的能量：$E_n=-\dfrac{hcR_{H\infty}}{n^2}$ ....(3)

其中 $R_{H\infty}$ 為未考慮折合質量修正下的雷德堡常數，(3) 式中表明如果將理論所得的雷德堡常數 $R_{H\infty}$ 代入，就可以得到氫原子不連續能階的分佈，但如何由理論求得 $R_{H\infty}$？這與第四個基本假設有關。

四、對應原理與軌道角動量量子化的引入（波耳創見）

由普朗克的振子能量量子論與愛因斯坦的光子論，波耳認為當一個不連續系統的的量子數 n 很小時，系統的量子化效應是非常重要的，但若量子數 n 很大時，這個系統將回歸古典的連續分佈的結果。另一種等價說法就是如果普朗克常數 h 不能視為零，那麼系統呈現量子化效應，反之，若 h 被視為零，那麼系統將回歸古典極限結果，波耳稱上述的效應為對應原理（Correspondence principle）。由對應原理，波耳認為原子在量子數很大的相鄰兩能階間進行躍遷的結果應回歸古典輻射，在這個前提下

令 n-m=1, $n+m\cong 2n,\ n^2m^2\cong n^4$

那麼 $\tilde{\nu}_{mn}=\left.\dfrac{E_n-E_m}{hc}\right|_{n\uparrow,m\uparrow}\cong\dfrac{2R_{H\infty}}{n^3}$ ....(4)

由古典理論知，電子繞核運轉所釋放的電磁輻射頻率：$\nu_{class.}=c\tilde{\nu}_{class.}=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{V}{r}$

因庫侖力 $F_c\propto\dfrac{1}{r^2}$，所以軌道上電子的動能，位能與能量三者關係：

$K=|E|=\left|\dfrac{U}{2}\right|=\dfrac{1}{2}m_eV^2$ ....(5)

上式 $U=2E=-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 為電子的軌道位能.................(6)

$\therefore\tilde{\nu}_{class}=\dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{V}{r}=\dfrac{\varepsilon_0}{ce^2}\sqrt{\dfrac{32|E|^3}{m_e}}$ ....(7)

由 (7)(4) 得 $R_{H\infty}=\dfrac{\varepsilon_0 n^3}{ce^2}\sqrt{\dfrac{8|E_n|^3}{m_e}}$ ....(8)

將 (8) 代入 (3) 得電子軌道能量：

$E_n=-\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0 n\hbar)^2}$（能量量子化分佈）.....................(9)

將 (9) 代入 (8) 得理論推得的雷德堡常數：

$$R_{H\infty}=\frac{m_e e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 c}=1.0973731\times10^7/m$$ （與實驗吻合）

將 (9) 代入 (6) 得電子的軌道半徑：

$$r_n=\frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e e^2}$$ （軌道量子化分佈）..........................(10)

將 (10) 代入 (5) 得電子的軌道速率：

$$V_n=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$$ （速率量子化分佈）.............................(11)

由 (10)(11) 得電子的軌道角動量

$L_n=m_e r_n V_n=n\hbar$（角動量量子化分佈）..................(12)

結語

由上述的推導知，定態、躍遷、頻率條件的基本假設與光譜系列經驗公式的結合是波耳模型的理論基石，由對應原理可推出雷德堡常數與能量量子化分佈，而電子的軌道角動量量子化其實是由對應原理所引出來的量子化現象，因此如果直接將角動量量子化條件做為推導波耳氫原子模型最先出發的量子化假設，那麼在理論上的確有其不夠嚴謹之處。讀者若要瞭解波耳基本假設被提出的原因與演化，本文或許可做為教學或學習的參考資料。

作 者

龍行天
大同大學物理組

參 考 資 料

[1] Benson 著 “University Physics” 第二版 p.846 ~ p.847
[2] Serway 著 ”Principle of Physics” 第四版 p.353 ~ p.355
[3] Eisberg 著 “Quantum Physics” 第二版 p.100 ~ p.101