非微擾正則量子重力理論的進展

文/林俊鈺、許祖斌

摘要

過去十五年來，非微擾正則量子重力理論有很大的進展，並給出有趣的結果。本文簡單地回顧這些發展，同時介紹幾篇易讀的專文讓有興趣讀者做進一步的閱讀。

一、 簡介

過去十五年來, 四維時空非微擾量子重力理論有重要的進展；理論學家們澄清了許多長年未解且基本的物理問題。這些包括了：以統計力學來推導出視界商(horizon entropy), 包含黑洞和宇宙學視界(horizon)；自然地解決標準宇宙學大霹靂奇點(big-bang singularity) 的困擾；以自旋泡沫模型(spin-foam model) 來建立無關於背景度規的量子重力理論, 並證明其收斂性。簡言之, 量子重力提供一套詳細的框架以解開幾何的量子微觀結構。

本文嘗試以導讀的方式, 帶領讀者回顧這一系列的發展。我們會省略大部分微妙的數學細節, 有興趣的讀者可參考文後由專家所撰寫的專文[1-8], 做更深入的閱讀。

二、重建廣義相對論的相空間

正則量子廣義相對論是希望能從數學上, 嚴謹地定義出一個非微擾, 且與背景度規無關的量子重力理論。這一套方法精簡, 直接在四維時空建構而不引進高維度空間。

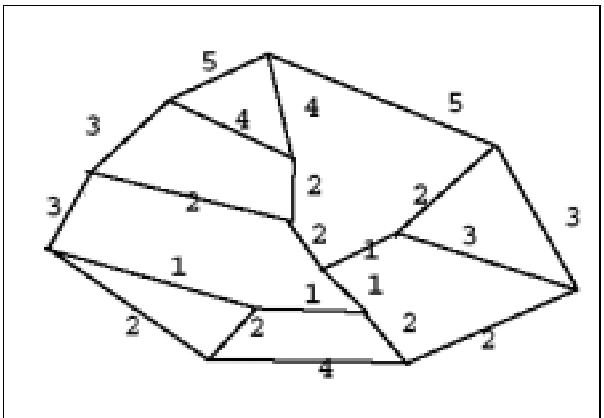
其中, 主要觀念上的突破是由 Ashtekar 率先提出。在他重建的廣義相對論下, 其相空間(由廣義座標及廣義動量所形成的空間)與楊密 SU(2)規範理論 (Yang-Mills SU(2) gauge theory)的相同。同時廣義座標也變成一個三維的規範矩陣向量場(SU(2) matrix-valued gauge vector potential), 所對應的廣義動量 E^{ia} 和三維度規有這樣的關係：

$$\left(\det E\right)^{-1}\sum_{a=1}^{3}E^{ia}E^{ja}=g^{ij} \qquad (1)$$

重建後的愛因斯坦方程式描述了這一些三維量如何演化出四維時空。在新的架構下, 度規是由廣義動量所決定的導出量(Eq.1)。廣義相對論中所必須滿足的幾個限制條件(四維時空座標轉換不變)也因而大幅簡化。這個技術上的大突破, 也使得我們可將重力的波函數或量子態視為規範場的泛函, 而這些泛函滿足三維時空座標轉換不變, 並具有SU(2)規範對稱性。

三、量子態空間及面積和體積的量子化

另一個重要進展是建立了一套在定義在規範場空間的泛函分析，並且不依賴於特定座標，甚至於任何背景時空的幾何結構。為了要計算量子態在希伯特(Hilbert)空間上的積分，首先需要定義出該空間的測度(measure)。適當的測度建立後，就可得出一套行為良好的積分理論。這個背景(kinematical)希伯特空間 H，可被分解成一些有限維希伯特空間 H_s 的總和，且 H_s 的元素為自旋網路(spin network)態。數學上，每一個 H_s 可視為一個自旋系統的量子態空間；自旋網路是一個由節點(node)所構成的圖(graph)，每個節點以三條鏈(link)彼此連接，每一條鏈對應某個正整數 p_l。



圖一：自旋網路(spin network)。

Penrose 首先引進自旋網路，嘗試建構一個空間幾何的量子力學描述；接著 Rovelli 及 Smolin 明確地將自旋網路對應到非微擾量子重力態。Ashtekar、Baez、Lewandowski、Loll、Thiemann……等人進一步地將它們的關係加以推廣，並給予嚴格的數學描述。這種希伯特空間的分解技巧可讓我們將任何量子幾何的問題，分解成一組有限自由度的量子力學問題。例如：只要知道 H_s 中每一個算元對自旋網路，也就是 H_s 中每一個元素的作用，就可以定義出 H 上的算元，因此可求出幾何運算子及其本徵值。結果是，面積與體積是量子化的，而它們所對應的本徵態正是那些自旋網路！例如，由 Rovelli 和 Smolin 所計算出的結果，一個以自旋網路所描述的表面之面積，也就是該面積運算子的本徵值為：

$$A = \frac{1}{2} L_p^2 \sum_l \sqrt{p_l^2 + 2 p_l} \ ,$$

這裡的 l 代表這個自旋網路中，穿過該面積的任一條鏈，L_p 為蒲郎克(Planck)長度 (~10^{-35} 公尺)。在這個理論的預測下，時空幾何的量子化似乎是一個基本的性質，而平常所熟悉的古典幾何，不過是由無數個基本的自旋網路態以適當方式組合而成。目前讀者手上的這一張紙，很可能就有多達 10^{68} 個鏈穿插其中！

四、量子重力與黑洞物理

繼 Bekenstein、霍金(Hawking)……等人在黑洞方面的研究後，對量子重力而言，主要的問題是：如何以統計力學來解釋黑洞商

$$S = \frac{k_B}{4 L_p^2} A_{Hor} \qquad (2)$$

的起源（k_B 為波茲曼常數，A_{Hor} 是視界的面積），以及何謂黑洞商的微觀自由度？從黑洞商和表面積的關係(Eq. 2)可知，一個與太陽質量相當的黑洞應該擁有約 $\exp(10^{77})$ 個量子態！但它們藏在哪裡呢？惠勒(Wheeler 有一個啟發性的解釋[9]：“大千來自位元(It from bit)”：若將黑洞的視界細分成

蒲朗克面積(L_p^2)大小的小單位，並賦予每個小單位兩種可能的微觀狀態，即一個位元，則所有可能的狀態數則為 $\Omega = 2^{A_{Hor}/L_p^2}$，其對應的商是 $S = k_B \log\Omega$，數量級相當於 Bekenstein-Hawking 所得出的黑洞商(Eq. 2)。惠勒的想法可從非微擾量子重力理論得出更精確的描述。採用了適當的邊界條件，我們可以將黑洞視界想像成一個被無數個自旋網路態所穿過的區域。每個態對應一個小區域，並帶有"面積量子"，因此整個視界的表面積 A_{Hor}，即是這些小區域面積的總合。進一步地，這些自旋網路態穿過視界的每一點，會有錐缺角(deficit angle) 的產生，在量子重力的框架下，它也是量子化的，且滿足 Gauss-Bonnet 公式(描述該拓撲結構之尤拉(Euler)數、與錐缺角和的關係) 。由此計算出可存在的自旋網路態數量，就可求出黑洞視界商的值為，

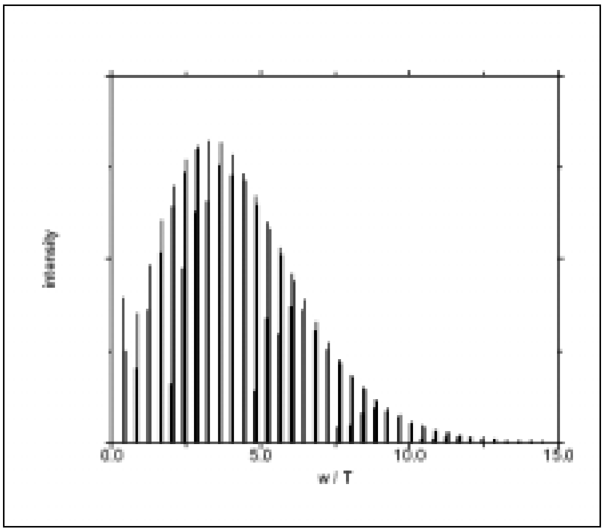
$$S = g\frac{k_B}{L_p^2}A_{Hor} + O\left(\frac{L_p^2}{A_{Hor}}\right)。$$

g 是一個與 Immirzi 參數(parameter)有關的無單位常數，並且從半古典極限可確定該參數的值。一但定下了 Immirzi 參數，上式就可用來計算所有的視界商(包括宇宙視界商)，無論黑洞的電荷及角動量，或是宇宙視界的宇宙常數。對於較大的視界，這個結果也符合彎曲空間量子場論的計算。在計數自旋網路態數量時，會發現大部分的態，都是具有最小面積量子的量子態，並且只有兩種可能的錐缺角，這即是量子重力對於惠勒想法的數學描述。

量子重力也可用來解釋黑洞輻射的機制。由於面積被量子化了，因而黑洞蒸發實際上是以一連串離散的過程在進行，並放射出特定頻率的能量。若把黑洞蒸發比喻為原子衰變的過程，黑洞表面積的本徵值就好比是原子能階的能量，而黑洞逐漸喪失面積量子而蒸發，就如同原子衰變是以光子能量為單位在進行。對較大的黑洞而言，每一個相鄰蒸發過程的面積差滿足下列的關係

$$\Delta A \le L_p^2 \exp\left(-\sqrt{\frac{A}{L_p^2}}\right)。$$

對於大面積來說(ΔA 迅速地趨近於零時)，其放射譜線幾乎是連續的(如圖二)。進一步地分析可知，大略是一個熱化(thermal)的譜線。



圖二：放射譜線頻率與強度的關係。

雖然只有離散的放射頻率，但整個曲線的輪廓仍是熱化的。當黑洞蒸發至蒲郎克大小時，精確的量子重力理論所預測之結果，將會與霍金輻射有顯著的差異。

五、量子重力與大霹靂宇宙論

近年來, 非微擾量子重力理論也被應用在量子宇宙學的研究上。Bojowald 首先考慮均勻(homogeneous)且各向同性(isotropic)的精確量子態。在古典廣義相對論下，時空的曲率反比於 Robertson-Walker 度規的尺度係數(scale factor)“**a**”的平方，因此在太初大霹靂奇點，即宇宙尺度係數為零的時候，勢必出現曲率無限大的情況。由 Penrose 和霍金所提出的古典奇點理論也證明：即使不採用宇宙為均勻、且各向同性的假設，大霹靂奇點依然存在。然而，精確的量子化結果顯示：尺度係數並不是連續的分布，它的本徵值是量子化的，且包含零，而對應到“零”的本徵態(即宇宙大小為零)實際上是收斂的。再者，當時的宇宙曲率也不如古典所預測，而有一個上界為

$$\frac{256}{81L_p^2},$$

如果和一個與太陽等質量的黑洞，其視界上的曲率相比，這個數字大了 10^{77} 倍，但不是無限大！隨著宇宙演化，年齡遠大於蒲朗克時間(10^{-43} 秒)，此時宇宙的量子態對應到較大的本徵值時，其行為也近似於如古典廣義相對論所預期：曲率反比於尺度係數的平方，這也和標準宇宙論相同。

回顧整個正則量子化的發展，許多原本看似無法克服的技術難題，或是難以賦予物理解釋的數學推導，都在意料之外的進展中被克服。這也加強了理論學家們的信心。也許在整套的過程中，我們早已抓到一些量子重力的精髓了。

參考資料：

[1] A. Ashtekar, K. Krasnov, Quantum Geometry and Black Holes, gr-qc/9804039, in Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe, Essays in honor of C.V. Vishveshwara, Ed. B.R. Iyer and B. Bhawal, (Kluwer, Netherlands).

[2] A. Ashtekar, Quantum Mechanics of Geometry, gr-qc/9901023.

[3] A. Ashtekar, Interface of General Relativity, Quantum Physics and Statistical Mechanics: Some Recent Developments, gr-qc/9910101, Annalen Phys. **9**, 178-198 (2000).

[4] A. Ashtekar, Quantum Geometry and Gravity: Recent Advances, gr-qc/0112038, Proceedings of the 16th. International Conference on General Relativity and Gravitation, Durban, S. Africa, July 2001.

[5] A. Ashtekar, Quantum Geometry in action: Big Bang and Black Holes, math-ph/0202008, Proceedings of the conference "Graphs and Patterns in Mathematics and Theoretical Physics" celebrating 60th birthday of Dennis Sullivan, Stony Brook, June 2001.

[6] A. Ashtekar, M. Bojowald, J. Lewandowski, Mathematical Structure of loop quantum cosmology, gr-qc/0304074, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233-268 (2003).

[7] L. Smolin, Three roads to quantum gravity, Basic Books Publisher (2001); How far are we from the quantum theory of gravity?, hep-th/0303185.

[8] L. Smolin, A quantum leap for cosmology, Physics World, Nov. 2001, http://physicsweb.org/article/world/14/11/3

[9] J. A. Wheeler, It from bits and quantum gravity, in "Sakharov Memorial Lectures on Physics", eds. L. Keldysh and V. Feinberg, Nova Science, New York, 1992, Vol. 2.

作者簡介

林俊鈺，國立成功大學物理系博士班研究生。

Email: 12891112@mail.cc.ncku.edu.tw

許祖斌，美國維吉尼亞理工科院博士，現任職於國立成功大學物理系。

Email: cpsoo@mail.ncku.edu.tw